

I. megoldás. A bizonyítandó egyenlőség bal oldalán szereplő húrokat rendre kiszámítva:

$$A_1 A_2 = 2 \cdot \sin 20^\circ, \quad A_1 A_3 = 2 \cdot \sin 40^\circ, \quad A_1 A_4 = 2 \cdot \sin 60^\circ,$$

$$A_1 A_5 = 2 \cdot \sin 80^\circ.$$

Azt kell tehát bizonyítanunk, hogy

$$16 \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = 3.$$

Induljunk ki a $\sin 100^\circ - \sin 80^\circ = 0$ egyenlőségből. Ennek mindkét oldalához adjuk hozzá a $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ számot:

$$\sin 100^\circ + \sin 60^\circ - \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A bal oldal első két tagjának összegét szorzattá alakítva:

$$2 \cdot \sin 80^\circ \cdot \cos 20^\circ - \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

azaz

$$2 \cdot \left(\cos 20^\circ - \frac{1}{2} \right) \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Mivel $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, ezt így írhatjuk:

$$2 (\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A zárójelben lévő különbséget szorzattá alakítva

$$2 \cdot 2 \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mindkét oldalt a $4 \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ számmal szorozva:

$$16 \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 3,$$

amit bizonyítanunk kellett.

Harcos Gergely (BP., ELTE Apáczai Csere J. Gimn. III. o. t.)

II. megoldás. A feladat állításánál valamivel általánosabb a következő tétel: Az egységsugarú körbe írt $A_1 A_2 \dots A_n$ szabályos n -szögre

$$A_1 A_2 \cdot A_1 A_3 \dots A_1 A_n = n.$$

Bizonyítása megtalálható *Reiman István*: A geometria és határterületei c. könyvének 224–225. oldalán. Ha ebben a tételben n páratlan, akkor $A_1 A_k = A_1 A_{n-k+2}$ ($k = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$), és így

$$(A_1 A_2 \cdot A_1 A_3 \cdot \dots \cdot A_1 A_{\frac{n+1}{2}})^2 = n,$$

amelyből

$$A_1 A_2 \cdot A_1 A_3 \cdot \dots \cdot A_1 A_{\frac{n+1}{2}} = \sqrt{n}.$$

Ezt $n = 9$ -re alkalmazva éppen a feladat állítását kapjuk.