

A feladat kitűzőjének igen frappáns megoldását ismertetjük. Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy ha α, β, γ egy nem derékszögű háromszög szögei, akkor

$$(1) \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma.$$

Ugyanis $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, tehát $\alpha + \beta = \pi - \gamma$. Ezért $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(\pi - \gamma)$, azaz

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = -\operatorname{tg} \gamma.$$

és ebből már következik (1). A feladat kérdésére úgy válaszolunk, hogy megvizsgáljuk a

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma)$$

különbség előjelét. Egyszerű átalakításokkal:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} \right) = \\ &= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma} = \\ &= \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)^2 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma} = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \gamma + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)^2 + (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)^2 + (\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha)^2}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma}, \end{aligned}$$

ahol közben fölhasználtuk (1)-et.

A különbség utolsó alakjában a számláló mindig pozitív, a nevező pedig tompaszögű háromszögben negatív, hegyesszögűben pozitív. Ezért a szögek tangenseinek összege tompaszögű háromszögekben kisebb, mint a kotangensek összege.

Megjegyzés. Megoldásunkból kitűnik, hogy

$$(2) \quad \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma < \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$$

minden hegyesszögű háromszögben. Megmutatjuk, hogy a (2) egyenlőtlenség nem éles, hanem igaz a következő élesebb egyenlőtlenség is:

$$(3) \quad 3(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) < \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma.$$

Induljunk ki a nyilvánvaló

$$(4) \quad 0 \leq (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)^2 + (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma)^2 + (\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha)^2$$

egyenlőtlenségből. Ebből

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2\operatorname{tg}^2 \alpha + 2\operatorname{tg}^2 \beta + 2\operatorname{tg}^2 \gamma - 2\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - 2\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma - 2\operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha, \\ \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha &\leq \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \gamma. \end{aligned}$$

amiből

$$3(\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha) \leq (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)^2.$$

Mindkét oldalt a pozitív $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$ -val osztva:

$$3 \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} \right) \leq \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)^2}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma}$$

azaz (1) szerint:

$$3(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) \leq \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma,$$

és ez éppen (3). Mivel átalakításaink megfordíthatóak, (3)-at igazoltuk. Könnyen belátható, hogy (3)-ban pontosan akkor teljesül egyenlőség, amikor (4)-ben, tehát a $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \gamma$ esetben, amikor is $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$.