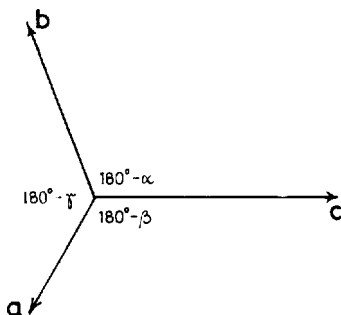


a) Vegyük fel a síkon a közös kezdőpontú  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorokat az 1. ábra szerint. Legyen  $|a| = 1 - \cos \alpha$ ,  $|b| = 1 - \cos \beta$  és  $|c| = 1 - \cos \gamma$ .

Felhasználjuk, hogy

$$(1) \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

(Ez az azonosság megtalálható pl. a Geometriai feladatok gyűjteménye II. kötet 434/f feladataként.)



1. ábra

Számítsuk ki az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorok összegének négyzetét:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{ab} + 2\mathbf{ac} + 2\mathbf{bc}.$$

A jobb oldali összeg utolsó három tagjában levő skaláris szorzatok kiszámításához szükséges szögek az 1. ábráról leolvashatók, tudjuk továbbá, hogy ez a négyzetösszeg nem negatív, ezért

$$(1 - \cos \alpha)^2 + (1 - \cos \beta)^2 + (1 - \cos \gamma)^2 - 2(1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta) \cos \gamma - 2(1 - \cos \beta)(1 - \cos \gamma) \cos \alpha - 2(1 - \cos \gamma)(1 - \cos \alpha) \cos \beta \geq 0,$$

azaz

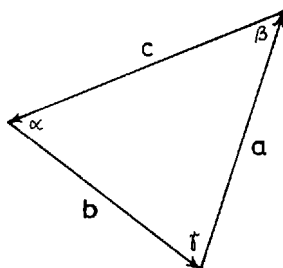
$$3 + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 4(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) + 4(\cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma + \cos \beta \cos \gamma) - 6 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \geq 0.$$

(1)-et felhasználva:

$$4 - 4(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) + 4(\cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma + \cos \beta \cos \gamma) - 8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \geq 0,$$

amelyből 4-gyel osztva és szorzattá alakítva:

$$(1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)(1 - \cos \gamma) \geq \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$



2. ábra

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$ , azaz, ha az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorok egy háromszög oldalvektorai, tehát ha az 1. ábra vektorai a 2. ábra szerinti helyzetbe tolhatók el. Alkalmazzuk a 2. ábra háromszögére a sinustételt:

$$\sin \alpha : \sin \beta = |\mathbf{a}| : |\mathbf{b}| = (1 - \cos \alpha) : (1 - \cos \beta).$$

Ebből a  $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$  és az  $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  azonosságok szerint

$$\left(2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}\right) : \left(2 \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2}\right) = \left(2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) : \left(2 \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2}\right),$$

amiből

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad \text{és így} \quad \alpha = \beta.$$

Hasonlóan láthatjuk be, hogy  $\beta = \gamma$ , ezért (2)-ben egyenlőség csak akkor lesz, ha  $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ .

b) Először azt mutatjuk meg, hogy

$$(3) \quad 6 \cdot \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma + \cos \beta \cos \gamma.$$

Tegyük fel először, hogy  $\alpha, \beta, \gamma$  egyike sem tompaszög. Ekkor a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint

$$(4) \quad \sqrt[3]{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma} \leq \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma + \cos \beta \cos \gamma}{3}$$

Ismeretes, hogy  $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \frac{1}{8}$ . (Igazolása megtalálható pl. *Reiman I.: A geometria és határterületei c. könyvének* 236. oldalán.) Ebből

$$(5) \quad 2 \cdot \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \sqrt[3]{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma}.$$

(4) és (5) alapján

$$6 \cdot \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma + \cos \beta \cos \gamma,$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha (4)-ben is és (5)-ben is egyenlőség van, ami csak  $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$  esetén lehetséges.

Ha a háromszög tompaszögű, feltehető, hogy  $\gamma > 90^\circ$ . Ekkor  $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$  negatív. Ha ezzel a szorzattal (3) mindkét oldalát elosztjuk, a kapott

$$(6) \quad 6 \geq \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta} + \frac{1}{\cos \gamma}$$

egyenlőtlenség ekvivalens (3)-mal, ezért elegendő ezt bizonyítani. Tegyük fel, hogy  $\alpha$  a legkisebb szög. Ekkor  $\alpha < 60^\circ$ , tehát  $\frac{1}{\cos \alpha} < 2$ . Mivel  $\beta < 180^\circ - \gamma$ , és  $\cos x$  a  $[0, \pi]$  intervallumon szigorúan monoton fogyó, ezért  $\cos \beta > \cos(180^\circ - \gamma)$ , amiből

$$\frac{1}{\cos \beta} < \frac{1}{\cos(180^\circ - \gamma)} = -\frac{1}{\cos \gamma}.$$

Ezután (6) jobb oldala így becsülhető:

$$\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta} + \frac{1}{\cos \gamma} < 2 - \frac{1}{\cos \gamma} + \frac{1}{\cos \gamma} = 2 < 6,$$

és azt is látjuk, hogy (6)-ban sohasem lehet egyenlőség.

Hátra van még a b)-ben levő jobb oldali egyenlőtlenség igazolása. Ismeretes, hogy

$$(7) \quad 1 < \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2},$$

és itt csak  $\alpha = \beta = \gamma$  esetén lehet egyenlőség. (Ennek bizonyítása is megtalálható pl. *Reiman I.* fentebb említett könyvének 229. oldalán.) Szorozzuk meg (7) második egyenlőtlenségének mindkét oldalát  $\frac{2}{3}(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)$ -val. Ekkor

$$\frac{2}{3}(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 \leq \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma,$$

ami így is írható:

$$(8) \quad (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 - \frac{(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2}{3} \leq \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma.$$

Alkalmazzuk a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget a  $|\cos \alpha|, |\cos \beta|, |\cos \gamma|$  számokra:

$$\sqrt{\frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}{3}} \geq \frac{|\cos \alpha| + |\cos \beta| + |\cos \gamma|}{3} \geq \frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{3} > 0,$$

amiből

$$(9) \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq \frac{(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2}{3}.$$

A (8) egyenlőtlenség bal oldalának második tagját a nála (9) szerint kisebbel helyettesítve:

$$(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma \leq \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma.$$

Ebből

$$2 \cdot \cos \alpha \cos \beta + 2 \cdot \cos \alpha \cos \gamma + 2 \cdot \cos \beta \cos \gamma \leq \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma.$$

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha (8)-ban és (9)-ben is egyenlőség van, tehát az  $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$  esetben. Ezzel a feladat mindkét állítását bebizonyítottuk.

*Podoski Károly* (Bp., Árpád Gimn., IV. o. t.)