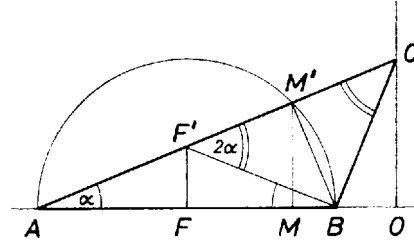


I. megoldás. Legyen először $OB = 0$. Ekkor az O pont nem megoldás, mert a $\angle BOA$ határozatlan. Az egyetlen megoldás most az a C pont lesz, amelyre $\angle CAB = 30^\circ$ és $\angle ACB = 60^\circ$. Ez a C pont könnyen megszerkeszthető.

Ha $OB > 0$, akkor az O pont nyilván megoldás lesz, mert $\angle BOA = 2\angle BAO = 0^\circ$, és így az O pontra teljesül a megkövetelt feltétel.



1. ábra

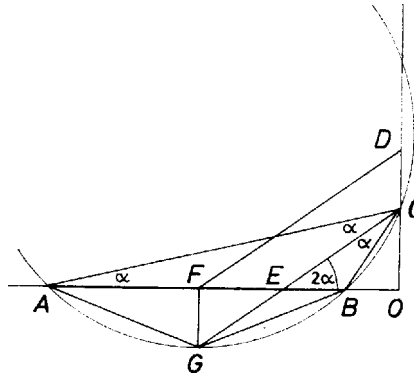
Keressünk ezután olyan C pontot, amely a derékszög másik szárán van, és O -tól különböző. Szerkesszük meg AB Thalész-körét, melynek középpontja legyen F . Az OF felezőmerőlegese messe a Thalész-kört az M' pontban. Állítjuk, hogy AM' a derékszög másik szárát a szerkesztendő C pontban metszi. Az 1. ábra jelöléseit használva láthatjuk, hogy $OFF'C$ derékszögű trapéz, amelynek középvonala MM' . Ezért $CM' = M'F'$. A Thalész-kör folytán pedig BM' merőleges CF' -re, tehát a BCF' háromszög egyenlő szárú. Ugyancsak egyenlő szárú az ABF' háromszög, amelynek A -nál levő szögét α -val jelölve $\angle BCF' = \angle BF'C = 2\alpha$. Így C valóban a kívánt tulajdonságú pont.

Ez a C pont csak akkor létezik, ha $OM > OB$, azaz

$$\frac{OB + BF}{2} > OB, \quad \text{vagyis} \quad AB > 2OB.$$

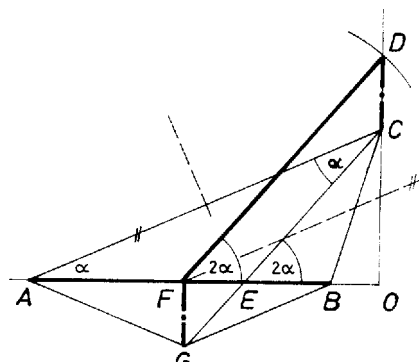
Megfordítva, ha $AB > 2OB$, akkor $OM > OB$, ahol M az OF felezőmerőlegesének és AB Thalész-körének (félkör) M' metszéspontja, és AM' , valamint a derékszög másik szárának C metszéspontja is, a fenti megfontolásunk szerint ekkor $\angle BCA = 2\angle BAC$ teljesül.

Székely-Dobó András (Bp., Petőfi S. Gimn., IV. o. t.)
dolgozata alapján



2. ábra

II. megoldás. Használjuk a 2. ábra jelöléseit. A speciális eseteket az I. megoldáshoz hasonlóan vizsgálhatjuk. Tegyük fel, hogy a derékszög másik szárán létezik a kívánt tulajdonságú, O -tól különböző C pont. Ekkor az ABC háromszög C -nél levő belső szögének felezője felezi a háromszög köré írt kör C -t nem tartalmazó AB ívét. Feltételeink szerint az ábrán α -val jelölt szögek egyenlők, és ezért a kerületi szögek tétele szerint $AG = GB = BC$, továbbá $\angle GAB = \angle GBA = \angle BGC = \alpha$, ami azt jelenti, hogy $AGBC$ szimmetrikus trapéz. De akkor átlói egyenlők, azaz $AB = GC$. Toljuk el a GC szakaszt GF távolsággal, így kapjuk az FD szakaszt. Mivel az AEC háromszög E -nél levő külső szöge 2α , ezért FD is 2α szöget zár be AB -vel. Ezután megállapíthatjuk, hogy ha C megszerkeszthető, akkor megszerkeszthető az AB -vel azonos hosszúságú FD segítségével a D pont is, és $FD > FO$, azaz $AB > \frac{AB}{2} + BO$, amiből $AB > 2OB$ a szerkeszthetőség szükséges feltétele. Megmutatjuk, hogy ez a feltétel elegendő is.



3. ábra

Tegyük fel ugyanis, hogy $AB > 2OB$. Az F köré rajzolt AB sugarú kör messe a derékszög másik szárát D -ben. A $DFO\angle = 2\alpha$ felezőjével – a 3. ábrán szaggatott vonallal szerepel – A -n át húzott párhuzamos a derékszög másik szárát egy C pontban metszi. Toljuk el FD -t DC -vel, így kapjuk F képeként a G pontot. Messe GC az AB egyenest az E pontban. Az eltolás miatt $CEO\angle = 2\alpha$, és mivel ez a szög az AEC háromszög külső szöge, $ECA\angle = \alpha$. Ez azt jelenti, hogy AB és CG az AC felezőmerőlegesére szimmetrikus szakaszok, vagyis $AGBC$ szimmetrikus trapéz, ami köré kör írható. A kerületi szögek tétele szerint $GCB\angle = \alpha$, tehát $BCA\angle = 2\alpha$. Ezért C a szerkesztendő pont.

III. megoldás. A speciális esetek vizsgálatát mellőzzük. A szerkesztést számítás alapján fogjuk elvégezni. Legyen $OC = x$, $OA = a$ és $OB = b$. A 2. ábra alapján $CBO\angle = 3\alpha$, továbbá

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{x}{b}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{a}.$$

A

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \cdot \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

azonosság miatt így

$$\frac{x}{b} = \frac{3 \cdot \frac{x}{a} - \frac{x^3}{a^3}}{1 - 3 \cdot \frac{x^2}{a^2}},$$

innen pedig $x = 0$, vagy

$$x = a \sqrt{\frac{a - 3b}{3a - b}},$$

ami megszerkeszthető.

A megoldhatóság feltétele: $a > 3b$, azaz $AB > 2OB$.