

A feladat eredeti szövegében nem szerepelt kifejezetten, hogy a számegyenes önmagára való leképezését keressük. Ezért elfogadtuk azokat a megoldásokat is, amelyek a számegyeneset a sík egy másik egyenesére képezték le. Az alábbi megoldásban  $f(x)$  a számegyenes önmagára való leképezését jelenti.

Az  $f(x)$ -re szóló feltételek szerint  $a(ax + b) + b = x$ , azaz  $(a^2 - 1)x + b(a + 1) = 0$  fennáll, minden valós  $x$ -re. Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$(1) \quad a^2 - 1 = 0$$

és

$$(2) \quad b(a + 1) = 0.$$

(1)-ből  $a = 1$  vagy  $a = -1$ .

Ha  $a = 1$ , akkor (2)-ből  $b = 0$ . Ekkor  $f(x) = x$ , amely az identikus leképezés.

Ha  $a = -1$ , akkor (2)-ből  $b$  tetszőleges valós szám. Ebben az esetben

$$(3) \quad f(x) = -x + b.$$

Milyen önmagára való leképezése ez a számegyenesnek? Könnyen belátható, hogy az  $x$  és  $-x + b$  koordinátájú pontok szimmetrikusak a  $\frac{b}{2}$  pontra, hiszen  $\frac{x + (-x + b)}{2} = \frac{b}{2}$ .

Ezért a (3) leképezés a  $\frac{b}{2}$  pontra való középpontos tükrözés az egyenesen.

A feladat kérdésére tehát azt válaszolhatjuk, hogy  $f(x)$  vagy a helybenhagyás, vagy a  $\frac{b}{2}$  koordinátájú pontra való tükrözés.

*Megjegyzés.* Feladatunkban a következő tulajdonságú leképezés szerepel: Ha az egyenes  $P$  pontjának képe  $Q$ , akkor a  $Q$  pont képe  $P$ . Ez másképpen szólva azt jelenti, hogy a leképezés megegyezik az inverzével. Az egyenes ilyen önmagára való (nem identikus) leképezését involúciónak nevezzük. Involúció például az egyenesnek az  $f(x) = \frac{a}{x}$  a hozzárendeléssel történő leképezése is.