

A feladat állítását  $k$ -ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha  $k = 1$ , akkor a feladat azt állítja, hogy 1 lépés után a kapott részek tömege kisebb 1-nél. (A csokoládé tömegét választjuk egységnek.) S valóban: az első lépésben legalább két, egyenként legfeljebb  $\frac{1}{2}$  tömegű részt kapunk.

Tegyük fel most, hogy a feladat állítása minden  $k < m$  számra igaz. Belátjuk, hogy akkor  $k = m$ -re is igaz.

Tegyük fel először, hogy  $m = 2r + 1$ . Nézzük, mi a helyzet az  $r$ -edik lépés után. Az indukciós feltevés szerint minden kapott rész tömege kisebb  $\frac{2}{r+1}$ -nél. Ebből viszont következik, hogy minden további osztásnál az újonnan

kapott részek tömege már  $\frac{1}{r+1}$ -nél is kisebb lesz, hiszen „legalább feleznünk kell” az éppen osztott részt. Ha tehát

az  $r$ -edik lépés után  $s$  db olyan részünk van, amelyek tömege legalább  $\frac{1}{r+1}$ , akkor a következő  $s$  lépésben ezt az

$s$  részt kell egyenként tovább bontanunk. (Ugyanis mindig  $\frac{1}{r+1}$ -nél kisebb részek keletkeznek, s ezekhez addig nem

nyúlhatunk, amíg van  $\frac{1}{r+1}$  vagy annál nagyobb is.) Ez viszont azt jelenti, hogy  $s + r$  lépés után már nem marad

olyan rész egyben, amelynek tömege  $\frac{1}{r+1}$ , vagy annál nagyobb volna. Nyilván a további lépésekben is minden kapott

rész tömege kisebb lesz  $\frac{1}{r+1}$ -nél. Másrészt  $s \leq r + 1$ , hiszen ha  $s \geq r + 2$  volna, akkor az  $s$  db egyenként legalább

$\frac{1}{r+1}$  tömegű rész együttes tömege 1-nél, a csokoládé egész tömegénél nagyobb volna. Ezek szerint  $s + r \leq 2r + 1 = m$

lépés után minden kapott rész tömege kisebb lesz  $\frac{1}{r+1} = \frac{2}{2r+2} = \frac{2}{m+1}$ -nél, s ezt kellett belátnunk.

Ha  $m = 2r$ , akkor  $\frac{1}{r+1} < \frac{1}{r+1/2} = \frac{2}{2r+1} = \frac{2}{m+1}$ , így elég azokat a részeket vizsgálnunk, amelyek  $\frac{1}{r+1}$ -nél

nagyobbak az  $r$ -edik lépés után. Ezekből legfeljebb  $r$  darab van (különben együttes tömegük 1-nél nagyobb volna, ami lehetetlen), így a következő legfőljebb  $r$  lépésben ezek felbontása fog sorra kerülni. Legkésőbb  $2r$  lépés után tehát már

minden kapott rész tömege  $\frac{1}{r+1}$  lesz, s ez kisebb  $\frac{2}{m+1}$ -nél.