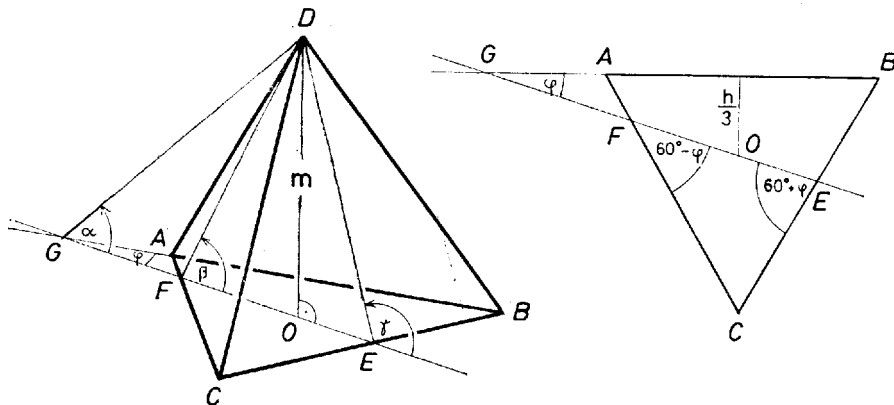


Legyenek a szabályos tetraéder alaplapjának csúcsai A, B, C , a negyedik csúcsa D . Ismeretes, hogy ha egy síkot két másik, egymással párhuzamos síkkal metszünk, a kapott metszévonalak párhuzamosak lesznek. Ezért a metsző síkot felvehetjük a D csúcson keresztül is, ettől α, β, γ nem változnak. Ekkor az ABC alaplappal képezett metszévonal átmegy az ABC háromszög magasságpontján. Messe ez a metszévonal például a BC oldalt E -ben, AC -t F -ben, AB egyenesét pedig G -ben. Legyen a tetraéder magassága m , az alapháromszögé h , és jelöljük az EGB szöget φ -vel. Utóbbi jelölésünkkel – mint az a jobb oldali ábráról látható – $\angle CFE = 60^\circ - \varphi$, és $\angle CEF = 60^\circ + \varphi$.



A bal oldali ábra alapján

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{DO}{GO}, \text{ a jobb oldali ábra alapján pedig } GO = \frac{h}{3 \cdot \sin \varphi}.$$

Ezért

$$(1) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{3m}{h} \cdot \sin \varphi.$$

Hasonlóan

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{DO}{FO}, \text{ és } FO = \frac{h}{3 \cdot \sin(60^\circ - \varphi)},$$

ezért

$$(2) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{3m}{h} \cdot \sin(60^\circ - \varphi),$$

$$(3) \quad \operatorname{tg} \gamma = -\frac{3m}{h} \cdot \sin(60^\circ + \varphi),$$

ahol figyelembe vettük, hogy esetünkben γ tompaszög.

Azt kell bizonyítanunk, hogy

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = 0,$$

azaz

$$(4) \quad \frac{3m}{h} [\sin \varphi + \sin(60^\circ - \varphi) - \sin(60^\circ + \varphi)] = 0.$$

Ismert azonosság szerint

$$\sin(60^\circ - \varphi) - \sin(60^\circ + \varphi) = -2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \sin \varphi = -\sin \varphi,$$

tehát (4) igaz. (Eljárásunk természetesen akkor is alkalmazható, ha az alaplapra illeszkedő metszévonal átmegy valamelyik csúcson.)

Megjegyzés. A feladat állítása csak akkor igaz, ha az α, β, γ szögeket alkalmasan irányítjuk. Ezt úgy tettük meg, hogy az O és E pontokat tartalmazó egyenest irányított egyenesnek tekintettük, és α, β, γ az irányított egyenessel bezárt szöget jelentette.