

Mivel az első transzformáció szerint A képe B , B képe A , és C fixpont,

$$(1) \quad AC = BC.$$

Jelöljük a második transzformációval létesített hozzárendelést nyíllal: ekkor

$$\begin{aligned} A &\rightarrow B \\ B &\rightarrow C \\ C &\rightarrow D \\ D &\rightarrow E \\ E &\rightarrow A, \quad \text{és így} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{cases} AB \rightarrow BC \\ BC \rightarrow CD \\ CD \rightarrow DE \\ DE \rightarrow EA, \end{cases}$$

és mivel ez egybevágósági transzformáció,

$$(3) \quad AB = BC = CD = DE = EA.$$

(2)-höz hasonlóan kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} AC &\rightarrow BD \\ BD &\rightarrow CE \\ CE &\rightarrow DA \\ DA &\rightarrow EB, \end{aligned}$$

amiből

$$(4) \quad AC = BD = CE = DA = EB.$$

Az (1) egyenlőség miatt a (3) és (4)-ben szereplő összes szakaszok egyenlőek, tehát az A, B, C, D, E pontok közül bármelyik kettő távolsága megegyezik. Ez azt jelentené, hogy $ABCD$ és $ABCE$ szabályos tetraéderek. A két tetraéder ABC lapja közös, ezért D és E vagy egybeesnek, vagy tükrösek az ABC lap síkjára. Ha $D = E$, akkor mind az öt pont egybeesik, és ekkor AB és CD egyaránt zérus, arányukat nem értelmezzük (bár lehetséges lenne ilyen esetben $0 : 0$ arányról beszélni).

Ha D és E tükrösek az ABC lapra, akkor DE a szabályos tetraéder magasságának kétszerese, azaz $DE = 2 \cdot AB \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$, ami azt jelenti, hogy $DE \neq AB$. Ez ellentmond (3)-nak, ezért az öt pont eme elrendezése nem felel meg a feltételeknek. Arra az eredményre jutottunk, hogy a feladat feltételeinek megfelelő *különböző* pontok nem léteznek a (három dimenziós) térben.

Megjegyzések. 1. Könnyű látni, hogy a síkban nem lehet felvenni négy különböző pontot úgy, hogy bármelyik kettő távolsága ugyanakkora legyen, de a térben ez lehetséges.

Matematikai absztrakció a négy dimenziós tér fogalma. Ebben értelmezhető a (három dimenziós) térbeli szabályos tetraéder általánosítása, egy olyan test, amelynek öt csúcsa van, és bármelyik két csúcsának távolsága ugyanakkora, azaz élei egyenlőek.

2. Feladatunkban – és ugyanígy a 2589. gyakorlatban is – a megoldás döntő részét annak a vizsgálata tette ki, hogy a két feltételezett transzformáció véges sokszori alkalmazásával az adott pontok (ill. az ezek által meghatározott szakaszok) milyen hozzárendeléseit valósíthatók meg; mindkét esetben azt találtuk, hogy bármely két pontpár átvihető egymásba. A feladatok háttérében az a tény áll, hogy ilyen módon *minden* kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés előállítható. Általánosabban a következőt láthatjuk be: Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ tetszőleges, de egymástól különböző objektumok, és jelöljük rendre t -vel és c -vel a következő megfeleltetéseket:

$$\begin{aligned} (t) \quad & A_1 \rightarrow A_2, A_2 \rightarrow A_1, A_3 \rightarrow A_3, \dots, A_n \rightarrow A_n, \text{ ill.} \\ (c) \quad & A_1 \rightarrow A_2, A_2 \rightarrow A_3, A_3 \rightarrow A_4, \dots, A_n \rightarrow A_1. \end{aligned}$$

Ha $B_1, B_2, \dots, B_n$ az $A_1, \dots, A_n$ elemeket jelöli egy tetszőleges sorrendben, akkor t és c véges sokszori alkalmazásával megkaphatjuk az $A_1 \rightarrow B_1, A_2 \rightarrow B_2, \dots, A_n \rightarrow B_n$ megfeleltetést.

Az állítás igazolásához először a

$$(t_i) \quad A_1 \rightarrow A_1, \dots, A_{i-1} \rightarrow A_{i-1}, A_i \rightarrow A_{i+1}, A_{i+1} \rightarrow A_i,$$

$$A_{i+2} \rightarrow A_{i+2}, \dots, A_n \rightarrow A_n$$

megfeleltetéseket állítjuk elő (itt $1 \leq i \leq n-1$ és nyilván $t_1 = t$).

Könnyen látható, hogy ha először a c megfeleltetést alkalmazzuk $(n+1-i)$ -szer, majd a t -t, és végül $(i-1)$ -szer a c megfeleltetést, akkor eredményül éppen a t_i -hez jutunk:

$$\begin{aligned} A_i \xrightarrow[n+1-i]{c, c, \dots, c} A_1 &\xrightarrow{t} A_2 \xrightarrow[i-1]{c, c, \dots, c} A_{i+1}, \\ A_{i+1} \xrightarrow[n+1-i]{c, c, \dots, c} A_2 &\xrightarrow{t} A_1 \xrightarrow[i-1]{c, c, \dots, c} A_i, \end{aligned}$$

és $v \neq i, i+1$ -re

$$A_v \xrightarrow[n+1-i]{c, c, \dots, c} A_s \ (s \neq 1, 2), \ A_s \xrightarrow{t} A_s, \ A_s \xrightarrow[i-1]{c, c, \dots, c} A_v.$$

Ezután a

$$(t_{ij}) \ A_1 \rightarrow A_1, \dots, A_i \rightarrow A_j, \dots, A_j \rightarrow A_i, \dots, A_n \rightarrow A_n \ (i < j)$$

megfeleltetéseket állítjuk elő, amelyek tehát A_i -t és A_j -t felcserélik, a többieket pedig helyben hagyják (önmaguknak feleltetik meg). Egymás után hajtsuk végre ugyanis a $t_i, t_{i+1}, \dots, t_{j-2}, t_{j-1}, t_{j-2}, \dots, t_i$ megfeleltetéseket: az eredmény nyilvánvalóan t_{ij} lesz.

Végül egy tetszőleges $B_1, B_2, \dots, B_n$ sorrend a következőképpen érhető el: ha $B_1 = A_i$, akkor t_{1i} alkalmazásával:

$$A_1 \rightarrow B_1, \ A_2 \rightarrow C_2, \dots, \ A_n \rightarrow C_n.$$

($i = 1$ esetén ez a lépés természetesen kimarad.)

Ha most $C_2 = A_j$ és $B_2 = A_k$, akkor másodjára a t_{jk} leképezést végrehajtva ($j, k \neq i$ miatt):

$$A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow B_1, \ A_2 \rightarrow C_2 \rightarrow B_2, \ A_3 \rightarrow D_3, \dots, \ A_n \rightarrow D_n.$$

Az előbbiekhez hasonlóan, $D_3 = A_w$ és $B_3 = A_z$ jelöléssel $w, z \neq i, k$, így t_{wz} elvégzése után:

$$\begin{aligned} A_1 &\rightarrow B_1 \rightarrow B_1 \rightarrow B_1, \ A_2 \rightarrow C_2 \rightarrow B_2 \rightarrow B_2, \\ A_3 &\rightarrow D_3 \rightarrow B_3, \ A_4 \rightarrow E_4, \dots, \ A_n \rightarrow E_n. \end{aligned}$$

Folytatva E_4 és B_4 cseréjével, majd tovább, látható, hogy a kívánt megfeleltetés összesen legfeljebb $(n-1)$ hasonló lépésben elérhető.