

I. megoldás. Először megvizsgáljuk, hogy milyen értékeket vehet fel az $a_{n+1} - a_n$ különbség. Tekintsük először a $b_n = \sqrt{(n+1)^2 + n^2}$ sorozat $b_{n+1} - b_n$ különbségsorozatát, mert ez könnyebben becsülhető:

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \sqrt{(n+2)^2 + (n+1)^2} - \sqrt{(n+1)^2 + n^2} = \\ &= \frac{(n+2)^2 - n^2}{\sqrt{(n+2)^2 + (n+1)^2} + \sqrt{(n+1)^2 + n^2}} = \\ &= \frac{4(n+1)}{\sqrt{(n+2)^2 + (n+1)^2} + \sqrt{(n+1)^2 + n^2}} = \\ &= \frac{4}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2 + 1} + \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2}}, \end{aligned}$$

és itt a nevezőben a gyökjelek alatt 1-nél nagyobb, illetve 3-nál kisebb szám áll, tehát a nevező nagyobb, mint 2, és kisebb, mint $2\sqrt{3} < 4$. Ezért $1 < b_{n+1} - b_n < 2$. Innen következik, hogy $[b_{n+1}] - [b_n] = a_{n+1} - a_n \geq 1$. Hiszen, ha két szám különbsége 1-nél nagyobb, akkor nem lehet azonos az egész részüik. Másrészt $a_{n+1} - a_n < b_{n+1} - (b_n - 1) = b_{n+1} - b_n + 1 < 3$. Így azt kapjuk, hogy $a_{n+1} - a_n$ csak 1 vagy 2 lehet.

Ha $a_{n+1} - a_n$ csak véges sok esetben, mondjuk k esetben lehetne 2, különben mindig 1-nek kellene lennie, akkor $a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1 \leq n + k + \sqrt{5}$ lenne, ha n olyan nagy, hogy már minden 2-es különbség szerepel a jobb oldalon. Másrészt $a_{n+1} = [\sqrt{(n+2)^2 + (n+1)^2}] > \sqrt{2}(n+1)$, így azt kapjuk, hogy minden, elég nagy n -re $n + k + \sqrt{5} > \sqrt{2}(n+1)$, azaz $(\sqrt{2} - 1)n < k + \sqrt{5} - \sqrt{2}$.

Itt a jobb oldal rögzített szám, a bal oldal pedig plusz végtelenhez tart, ami ellentmondás. Ezzel beláttuk, hogy az $a_{n+1} - a_n$ különbség végtelen sokszor veszi fel a 2 értéket.

Most tegyük fel, hogy $a_{n+1} - a_n$ csak véges sokszor, mondjuk k esetben veszi fel az 1 értéket. Ekkor $a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \dots + (a_2 - a_1) + \sqrt{5} = 2n - k + \sqrt{5}$, ha n olyan nagy, hogy már minden 1-es különbség szerepel a jobb oldalon. De $a_{n+1} < \sqrt{2}(n+2)$, így most azt kapjuk, hogy $2n - k + \sqrt{5} < \sqrt{2}n + 2\sqrt{2}$, tehát minden elég nagy n -re $(2 - \sqrt{2})n < 2\sqrt{2} + \sqrt{5} + k$, s ez megint ellentmondás. Így az $a_{n+1} - a_n$ különbség végtelen sokszor veszi fel az 1 értéket is. Más értéke nem lehet, ezzel a bizonyítást befejeztük.

II. megoldás. Jelöljük ismét b_n -nel $\sqrt{(n+1)^2 + n^2} = \sqrt{2n^2 + 2n + 1}$ -et. Ekkor $n \geq 1$ -re

$$(1) \quad \sqrt{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) < b_n < \sqrt{2} \left(n + \frac{3}{5} \right),$$

$$\text{hiszen } \left(\sqrt{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right)^2 = 2n^2 + 2n + \frac{1}{2} < 2n^2 + 2n + 1 = b_n^2 < 2n^2 + 2,4n + 0,72.$$

Ebből következik, hogy $b_{n+1} - b_n < \sqrt{2} \left(n + 1 + \frac{3}{5} - n - \frac{1}{2} \right) = \frac{11\sqrt{2}}{10} < 2$ és $b_{n+1} - b_n > \sqrt{2} \left(n + 1 + \frac{1}{2} - n - \frac{3}{5} \right) = \frac{9\sqrt{2}}{10} > 1$. Ez utóbbi egyenlőtlenség szerint $[b_{n+1}] > [b_n]$, tehát $a_{n+1} - a_n \geq 1$, míg az első egyenlőtlenség alapján $a_{n+1} - a_n < b_{n+1} - b_n + 1 < 3$, tehát $a_{n+1} - a_n \leq 2$.

Az $a_{n+1} - a_n$ különbség csak két értéket vehet tehát fel: lehet 1 és 2.

Először azt mutatjuk meg, hogy végtelen sokszor veszi fel az 1 értéket. Ehhez tekintsük a $b_{n+2} - b_n$ különbséget.

Ez (1) szerint legfőljebb $\sqrt{2} \left(n + 2 + \frac{3}{5} - n - \frac{1}{2} \right) = \sqrt{2} \cdot 2,1 < 3$, így $a_{n+2} - a_n < b_{n+2} - b_n + 1 < 4$. Ebből

következik, hogy az $a_{n+2} - a_n = (a_{n+2} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n)$ különbség legfeljebb 3. Akkor viszont az $a_{n+2} - a_{n+1}$ és az $a_{n+1} - a_n$ különbségek közül legalább az egyik 1 (különben összegük $2+2=4$ volna!). Beláttuk tehát, hogy két szomszédos $a_{n+1} - a_n$ különbség között legalább az egyik 1, s így valóban végtelen sok 1 van közöttük. Hasonlóan bizonyíthatjuk, hogy három szomszédos között legalább egy esetben 2 a különbség. Ellenkező esetben ugyanis

$$a_{n+3} - a_n = (a_{n+3} - a_{n+2}) + (a_{n+2} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n) = 3,$$

s így $b_{n+3} - b_n < a_{n+3} + 1 - a_n = 4$ volna. De (1) szerint

$$b_{n+3} - b_n > \sqrt{2} \left(n + 3 + \frac{1}{2} - n - \frac{3}{5} \right) = \sqrt{2} \cdot 2,9 > 4,$$

ami ellentmondás. Ezzel beláttuk, hogy a 2 érték is végtelen sokszor fordul elő.