Ismeretes, hogy az első n természetes szám számtani közepe $\frac{n+1}{2} = A$. Mértani közepe nagyobb $\frac{n}{e}$ -nél, hiszen $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Így $n \geqq 3$-ra $2G > \frac{2n}{e} > A = \frac{n+1}{2}$ $\left(\text{hiszen } n\left(\frac{4-e}{e}\right) > 1, \text{ ha } n > 2\right)$.

Másrészt

$$H = \frac{n}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}} < \frac{n}{\ln(n+1)},$$

mert $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} > \ln(n+1)$. Ha $n \geqq [e^{200}]$, akkor $n+1 > e^{200}$, így $\ln(n+1) > 200$ és $100H < \frac{100n}{\ln(n+1)} < \frac{n}{2} < A$.

Az első e^{200} pozitív egészre tehát teljesül, hogy $2G > A > 100H$, s így az is, hogy $4G > A > 15H$. (Ez utóbbi már az első $[e^{15}]$ számra is teljesül.)

Megjegyzés. 1. Az $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$ egyenlőtlenség bizonyításához elég felhasználni, hogy minden $j \geqq 1$ egészre $\left(\frac{j+1}{j}\right)^j < e$, s ezért $\frac{(j+1)^{j+1}}{j^j} < e(j+1)$. Ha ezeket az egyenlőtlenségeket összeszorozzuk $j = 1, 2, \ldots, (n-1)$-re, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-2)^{n-2}} \cdot \frac{(n-2)^{n-2}}{(n-3)^{n-3}} \cdot \ \ldots \ \cdot \ \frac{2^2}{1} < e^{n-1} n!,$$

vagyis $\frac{n^n}{e^{n-1}} < n!$, ami kicsit erősebb is a szükséges $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$ egyenlőtlenségnél.

A másik felhasznált egyenlőtlenség bizonyításához is az $1 + x < e^x$, tehát $\ln(1+x) < x$ egyenlőtlenség szükséges $(x > 0)$. Ha itt $x = \frac{1}{j}$-t írunk, akkor

$$\frac{1}{j} > \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right) = \ln\frac{j+1}{j} = \ln(j+1) - \ln j.$$

Ha most ezeket az egyenlőtlenségeket $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$-re összeadjuk, a kívánt

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln\,(n+1) - \ln\,n + \ln\,n - \ln\,(n-1) + \ldots + -\ln\,1 =$$

$$= \ln\,(n+1) - \ln\,1 = \ln\,(n+1)$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

2. A fenti megoldás gondolatmenetével az is látható, hogy ha $n \geqq [e^m]$, akkor az első n pozitív egész számra $2G > A > m \cdot H$ teljesül. Sőt, $2G$ helyett egy $\frac{e}{2}$-nél nem sokkal nagyobb α-val még αG is írható.

Az iménti megoldások nagyon sok szám megadását igénylik. A b) feladat megoldásához $[e^{200}]$ szám kell, s ez 87 jegyű. De még az a) rész megoldásához használt $[e^{15}]$ szám is sok: $[e^{15}] = 3\,269\,017$. A II. megoldásban megmutatjuk, hogy lényegesen kevesebb szám is elegendő.

II. megoldás. Az a) pont követelményei már két számmal is teljesíthetők, ilyenek pl. $a_1 = 1$ és $a_2 = 61$. Ekkor

$$4 \cdot G = 4\sqrt{61} > \ A = \frac{1+61}{2} = 31 \ > 15 \cdot H = 15 \cdot \frac{2 \cdot 61}{62} = \frac{15 \cdot 61}{31},$$

hiszen $16 \cdot 16 > 31^2 > 15 \cdot 61$.

A b) ponthoz legyen $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_{11} = 2^{11}$. Ekkor

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{11}}{11} = \frac{1 + 10 \cdot 2^{11}}{11}, \quad G = \sqrt[11]{1 \cdot (2^{11})^{10}} = 2^{10},$$

és

$$H = \frac{11}{1 + 10 \cdot 2^{-11}} < 11.$$

Így

$$2G = 2^{11} > A = \frac{1 + 10 \cdot 2^{11}}{11} > 100 \cdot 11 > 100H.$$

A megadott 11 számra tehát teljesül a feladat követelménye.

III. megoldás. A fenti konstrukció általánosításával megmutatjuk, hogy minden pozitív m egész számhoz megadhatók olyan pozitív egészek, amelyekre

$$2G > A > m \cdot H.$$

Ez $m = 100$-ra a feladat b) részét adja, amiből persze az a) rész is következik. Legyen a $a_1 = 1,\ a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 2^n$.

Ekkor

$$2G = 2 \cdot \sqrt[n]{(2^n)^{n-1} \cdot 1} = 2^n > \frac{1+(n-1)2^n}{n} = A.$$

Másrészt $n \geqq 2$ esetén $A > \frac{n-1}{n} 2^n \geqq 2^{n-1}$, s végül $H = \frac{n}{1+(n-1)2^{-n}} < n$. Így azt kell csak belátnunk, hogy ha m adott egész szám, akkor megadható hozzá olyan n, amelyre $2^{n-1} \geqq m \cdot n$, hiszen ekkor $A > 2^{n-1} \geqq m \cdot n > m \cdot H$ teljesül. De ismeretes, hogy az $\frac{n}{2^{n-1}}$ sorozat nullához tart, ha n tart a végtelenhez, így minden elég nagy n-re $2^{n-1} \geqq m \cdot n$, ezért

$$2G = 2^n > A = \frac{1+(n-1)2^n}{n} > 2^{n-1} \geqq m \cdot n > m \cdot H.$$

IV. megoldás. A feladat további élesítéseként megmutatjuk, hogy minden m pozitív egészre megadhatók úgy egész számok, hogy

$$\left(1+\frac{1}{m}\right) G \geqq A > m \cdot H \tag{1}$$

teljesüljön. A konstrukció a III. megoldás általánosítása: Legyen $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = \left(1+\frac{1}{m}\right)^n$. Ekkor

$$\left(1+\frac{1}{m}\right) G = \left(1+\frac{1}{m}\right) \sqrt[n]{\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^n\right)^{n-1} \cdot 1} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{m}\right)^n > \frac{1+(n-1)\left(1+\frac{1}{m}\right)^n}{n} = A$$

$$\left(\text{hiszen } \left(1+\frac{1}{m}\right)^n > 1, \text{ s így } \; 1+\left(1+\frac{1}{m}\right)^n (n-1) > n\left(1+\frac{1}{m}\right)^n.\right)$$

Másrészt úgy kell megválasztanunk n-et, hogy

$$A > m \cdot H \tag{2}$$

teljesüljön (ahol m rögzített pozitív egész). Ha $n \geqq 2$, akkor $\frac{n-1}{n} \geqq \frac{1}{2}$, így

$$A = \frac{1+(n-1)\left(1+\frac{1}{m}\right)^n}{n} > \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right)^n.$$

Másrészt

$$H = \frac{n}{1+(n-1)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-n}} < \; n.$$

Elég tehát belátnunk, hogy n megválasztható úgy, hogy

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right)^n > m \cdot n \tag{3}$$

teljesüljön, hiszen a bal oldal kisebb A-nál, a jobb oldal nagyobb $m \cdot H$-nál. De ismeretes, hogy ha $\varepsilon > 0$, akkor az $\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}$ sorozat nullához tart, ha n tart a végtelenhez. Innen $\varepsilon = \frac{1}{m}$ választással azt kapjuk, hogy az $\frac{n}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^n}$ sorozat tart nullához, tehát minden elég nagy n-re

$$\frac{n}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^n} < \frac{1}{2m},$$

azaz (3) minden elég nagy n re fennáll; tehát (1) is teljesül.

Ha most m et éppen 100-nak választjuk, akkor kapunk olyan n számot, amellyel $\left(1+\frac{1}{100}\right)G > A > 100H$, ebből pedig a feladat állítása nyilvánvalóan következik.

Pór Attila (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A (2) egyenlőtlenség közvetlenül is könnyen igazolható, ha $n \geqq 6m^2$. Ha $n \geqq 3$, akkor a binomiális tétel szerint kifejtve $\left(1+\frac{1}{m}\right)^n$-et, a negyedik tag $\binom{n}{3}\frac{1}{m^3}$. Mivel minden tag pozitív, ezért $n \geqq 3$ esetén

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right)^n > \frac{1}{2}\binom{n}{3}\frac{1}{m^3} = n\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 6m^3}.$$

Elég tehát belátnunk, hogy ha $n \geqq 6m^2$, akkor $(n-1)(n-2) > 12m^4$ (ez elegendő és persze szükséges is), vagyis $(6m^2-1)(6m^2-2) = 36m^4 - 18m^2 + 2 > 12m^4$, s ez $m \geqq 1$-re valóban igaz.