

Nyilván elég azt belátni, hogy ha $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$, akkor $A_k \geq A_{k+1}$, mert ebből a feladat állítása már következik. Beszorzással azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A_k &= a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n + (a_1^k a_2^{n-k} + a_2^k a_1^{n-k}) + (a_1^k a_3^{n-k} + a_3^k a_1^{n-k}) + \dots \\ &+ (a_1^k a_n^{n-k} + a_n^k a_1^{n-k}) + (a_2^k a_3^{n-k} + a_3^k a_2^{n-k}) + \dots + \dots + (a_{n-1}^k a_n^{n-k} + a_n^k a_{n-1}^{n-k}) = \\ &\sum_{i=1}^n a_i^n + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1+1}^n (a_i^k a_j^{n-k} + a_j^k a_i^{n-k}). \end{aligned}$$

Belátjuk, hogy ha $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$, akkor

$$(1) \quad a_i^k a_j^{n-k} + a_j^k a_i^{n-k} \geq a_i^{k+1} a_j^{n-k-1} + a_j^{k+1} a_i^{n-k-1},$$

és egyenlőség csak $a_i = a_j$ esetén áll. Rendezzük a bizonyítani kívánt egyenlőséget:

$$(a_i^k a_j^{n-k-1} - a_j^k a_i^{n-k-1})(a_j - a_i) \geq 0.$$

Itt $k < n - k - 1$, hiszen $k \leq \frac{n}{2} - 1$; tehát az első tényezőből kiemelhető $a_i^k a_j^k$:

$$a_i^k a_j^k (a_j^{n-2k-1} - a_i^{n-2k-1})(a_j - a_i) \geq 0.$$

Most $n - 2k - 1 > 0$ miatt az utolsó két tényező egyenlő előjelű, és $a_i a_j > 0$, ezért az egyenlőtlenség valóban igaz, és csak $a_i = a_j$ esetén van egyenlőség. Ha a bizonyított (1) egyenlőséget minden $1 \leq i \leq j \leq n$ -re összeadjuk, és $\sum_{i=1}^n a_i^n$ -t hozzáadunk, éppen a bizonyítandó $A_k \geq A_{k+1}$ egyenlőtlenséghez jutunk. Egyenlőség pontosan $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ esetén (ill. a feladatban $k = j$ esetén is) áll.

Miklós György (Bp., I. István Gimn., III. o. t)