

I. megoldás. A tört nevezője $N = 1 + 2\sqrt[5]{2} - (\sqrt[5]{2})^2$. A feladatot nyilván megoldottuk, ha találunk olyan $a_0 + a_1\sqrt[5]{2} + a_2(\sqrt[5]{2})^2 + a_3(\sqrt[5]{2})^3 + a_4(\sqrt[5]{2})^4 = s$ számot, amellyel N -et megszorozva 1-et kapunk, és a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 racionális. Az $s \cdot N$ szorzást elvégezve $b_0 + b_1\sqrt[5]{2} + b_2(\sqrt[5]{2})^2 + b_3(\sqrt[5]{2})^3 + b_4(\sqrt[5]{2})^4$ alakú számot kapunk, ahol $b_0 = a_0 - 2a_3 + 4a_4$ (mert az összesorzásnál racionális tagot 1 és a_0 ; $-(\sqrt[5]{2})^2$ és $a_3 \cdot (\sqrt[5]{2})^3$, valamint $2\sqrt[5]{2}$ és $a_4(\sqrt[5]{2})^4$ összesorzásából kapunk), $b_1 = a_1 + 2a_0 - 2a_4$, (mert „racionálisszor $\sqrt[5]{2}$ ” alakú tagot 1 és $a_1\sqrt[5]{2}$; $2\sqrt[5]{2}$ és a_0 , valamint $-(\sqrt[5]{2})^2$ és $a_4(\sqrt[5]{2})^4$ összesorzásából kapunk), hasonlóan $(\sqrt[5]{2})^2$ szorzója $b_2 = a_2 + 2a_1 - a_0$, $(\sqrt[5]{2})^3$ szorzója $b_3 = a_3 + 2a_2 - a_1$, végül $(\sqrt[5]{2})^4$ szorzója $b_4 = a_4 + 2a_3 - a_2$. Azt akarjuk, hogy a szorzat 1 legyen; ehhez elegendő, hogy $b_0 = 1, b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$ legyen, azaz

$$\begin{aligned} a_0 - 2a_3 + 4a_4 &= 1 \\ 2a_0 + a_1 - 2a_4 &= 0 \\ -a_0 + 2a_1 + a_2 &= 0 \\ -a_1 + 2a_2 + a_3 &= 0 \\ -a_2 + 2a_3 + a_4 &= 0. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása $a_0 = \frac{25}{161}, a_1 = \frac{8}{161}, a_2 = \frac{9}{161}, a_3 = \frac{-10}{161}, a_4 = \frac{29}{161}$, így

$$\frac{1}{1 + \sqrt[5]{64} - \sqrt[5]{4}} = \frac{25 + 8\sqrt[5]{2} + 9\sqrt[5]{4} - 10\sqrt[5]{8} + 29\sqrt[5]{16}}{161}.$$

II. megoldás. Vegyük észre, hogy a nevező szorzattá alakítható:

$$N = 1 + \sqrt[5]{64} - \sqrt[5]{4} = 2 - (\sqrt[5]{2} - 1) = (\sqrt{2} + 1 - \sqrt[5]{2})(\sqrt{2} - 1 + \sqrt[5]{2}) = T_1 \cdot T_2.$$

Most alkalmazva az $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$ azonosságot, először $a = \sqrt{2} + 1, b = -\sqrt[5]{2}$, másodszor $a = \sqrt{2} - 1, b = \sqrt[5]{2}$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1 - \sqrt[5]{2}} =$$

$$\frac{(\sqrt{2} + 1)^4 + (\sqrt{2} + 1)^3 \cdot \sqrt[5]{2} + (\sqrt{2} + 1)^2 \cdot \sqrt[5]{4} + (\sqrt{2} + 1)\sqrt[5]{8} + \sqrt[5]{16}}{(\sqrt{2} + 1)^5 - 2}$$

és

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1 + \sqrt[5]{2}} =$$

$$\frac{(\sqrt{2} - 1)^4 - (\sqrt{2} - 1)^3 \cdot \sqrt[5]{2} + (\sqrt{2} - 1)^2 \cdot \sqrt[5]{4} - (\sqrt{2} - 1)\sqrt[5]{8} + \sqrt[5]{16}}{(\sqrt{2} - 1)^5 + 2}.$$

Ha a két egyenlet jobb oldalán álló törtet összeszorozzuk, a nevező $(\sqrt{2} + 1)^5 \cdot (\sqrt{2} - 1)^5 + 2((\sqrt{2} + 1)^5 - (\sqrt{2} - 1)^5) - 4 = 2((\sqrt{2} + 1)^5 - (\sqrt{2} - 1)^5) - 3$, s itt a zárójelben egész szám, 82 áll. A két számláló összeszorozása után az I. megoldás eredményét kapjuk.

Pócs Miklós (Bp., Evangélikus Gimn., III. o. t.)