

**I. megoldás.** Ha  $a, b, c$  valós számok, akkor mindhárom gyökjel alatt nemnegatív szám áll, mert az első kifejezés  $(a-b)^2$  és  $(a+b)^2$ , a második  $(b-c)^2$  és  $(b+c)^2$ , a harmadik pedig  $(a-c)^2$  és  $(a+c)^2$  közé esik. Így a feladat állítása minden  $a, b, c$  valós számhármásra értelmes. Az is világos, hogy mindkét oldal nemnegatív, így négyzetre emelhetünk, ez az egyenlőtlenség érvényén nem változtat. A négyzetreemelés és a rendezés elvégzése után a

$$2\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^4 + b^2c^2 - ab^3 - abc^2 - a^2bc - b^3c + b^2ac} \geq ab + ac + bc - 2b^2$$

egyenlőtlenséghez jutunk. A bal oldal mindig nemnegatív. Ha a jobb oldal negatív, akkor kész vagyunk: az egyenlőtlenség igaz. Ha pedig mindkét oldal nemnegatív, akkor négyzetre emelhetünk. Ezt elvégezve, és a kapott egyenlőtlenséget rendezve a valóban igaz

$$3(ab + bc - ac)^2 \geq 0$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Ezzel egyenlőtlenségünket minden esetre beláttuk. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha  $ac = ab + bc$ , és  $ab + ac + bc - 2b^2 \geq 0$ .

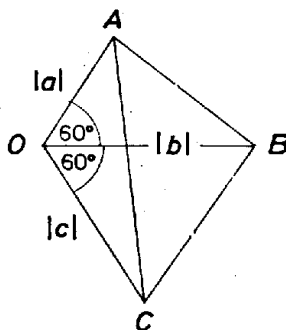
*Kovács Ágnes (Jászberény, Lehel Vezér Gimn., IV. o. t.)*

**II. megoldás.** Az egyenlőtlenséget geometriai úton bizonyítjuk. Azt fogjuk belátni, hogy ha  $a, b, c$  valós számok, akkor

$$(1) \quad \sqrt{|a|^2 + |b|^2 - |a||b|} + \sqrt{|b|^2 + |c|^2 - |b||c|} \geq \sqrt{|a|^2 + |c|^2 + |a||c|}.$$

Itt a bal oldal kisebb, a jobb oldal nagyobb a bizonyítandó egyenlőtlenség megfelelő oldalánál, tehát a fenti egyenlőtlenségből már következik a feladat állítása.

Az (1) belátásához tekintsünk a síkon négy pontot,  $O, A, B, C$ -t, úgy hogy  $OA = |a|$ ,  $OB = |b|$ ,  $OC = |c|$ , továbbá  $AOB \sphericalangle = BOC \sphericalangle = 60^\circ$ ,  $AOC \sphericalangle = 120^\circ$  legyen (1. ábra).



1. ábra

A koszinusz tétel szerint

$$\overline{AB} = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{a^2 + b^2 - |a||b|},$$

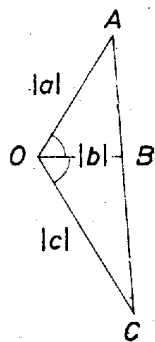
ugyanígy

$$\overline{BV} = \sqrt{b^2 + c^2 - |b||c|} \quad \text{és} \quad \overline{AC} = \sqrt{OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cos 120^\circ} = \sqrt{a^2 + c^2 + |a||c|}.$$

Az (1) egyenlőtlenség tehát éppen az  $AB + BC \geq AC$  háromszögegyenlőtlenség, s így nyilvánvalóan igaz.

*Vidács Attila (Bp., Táncsics M. Gimn., III. o. t.)*

*Megjegyzés.* Nyilvánvaló, hogy (1)-ben egyenlőség pontosan akkor áll, ha  $A, B, C$  egy egyenesbe esik (2. ábra).



2. ábra

Ekkor az  $OAC$  háromszög kétszeres területe,  $|a||c| \sin 120^\circ$  egyenlő az  $OAB$  és  $OBC$  háromszögek kétszeres területének összegével,  $|b|(|a| + |c|) \sin 60^\circ$ -kal. Innen  $|b|(|a| + |c|) = |a||c|$ . Ezenkívül szükséges, hogy (1) megegyezzen a feladatbeli egyenlőséggel, tehát  $|a||b| = ab$ ,  $|a||c| = ac$ ,  $|b||c| = bc$  teljesüljön, azaz  $a$ ,  $b$  és  $c$  előjele azonos legyen.