

I. megoldás. A feladatot ún. kettős teljes indukcióval igazoljuk. Ez azt jelenti, hogy n -re vonatkozó teljes indukciót alkalmazunk, de ezen belül az indukciós lépést k -ra vonatkozó indukcióval bizonyítjuk.

1. *Kezdő lépés.* $n = 0$ esetén az állítás igaz, hiszen $0! = 1$ és $f(0, k)$ minden k -ra egész ($k = 0$ -ra 1 , $k > 0$ -ra 0), tehát $0! \mid f(0, k)$ igaz.

2. *Indukciós lépés.* Tegyük fel, hogy $f(n, k)$ minden k természetes számra osztható $n!$ -sal, és belátjuk, hogy ebből következik, hogy $f(n+1, k)$ minden k természetes számra osztható $(n+1)!$ -sal.

Ezt k -ra vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Ha $k = 0$, akkor $f(n+1, 0) = 0$ osztható $(n+1)!$ -sal. Most tegyük fel, hogy már beláttuk valamelyik k -ra $f(n+1, k)$ osztható $(n+1)!$ -sal. Ekkor $f(n+1, k+1) = (n+1)[f(n+1, k) + f(n, k)]$ a definíció szerint, és itt a zárójel mindkét tagja osztható $n!$ -sal (az első tag még $(n+1)!$ -sal is), tehát $f(n+1, k+1)$ osztható $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ -sal. Így beláttuk, hogy $f(n+1, k)$ minden k -ra osztható $k!$ -sal, s ezzel az indukciós lépést, tehát a bizonyítást is befejeztük.

Megjegyzések. 1. A bizonyítás azt is megmutatta, hogy $f(n, k)$ minden (n, k) természetes számpárra (véges sok lépésben) kiszámolható.

2. A bizonyításban alkalmazott kettős indukció esetünkben könnyen „egyszeressé” változtatható, ha az indukciót nem n , majd k , hanem $(n+k)$ szerint végezzük.

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy az $f(n, k)$ függvénynek kombinatorikus jelentése van. Jelölje $g(n, k)$ azt a számot, ahányféleképpen az $1, 2, \dots, k$ számokat pontosan n (megkülönböztetett) osztályba lehet sorolni, vagyis ahányféleképpen n csoportba lehet őket osztani úgy, hogy minden csoportba kerüljön szám. Ha két felosztás csak abban különbözik egymástól, hogy csoportokat egészben felcserélünk, azt is különbözőnek számítjuk. (Pl. $k = 4$, $n = 3$ -ra az $\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}$ felosztás és a $\{3, 4\}, \{2\}, \{1\}$ felosztás különböző.) Bebizonyítjuk, hogy $g(n, k)$ -re teljesülnek a feladat egyenletei. Ekkor a fenti megjegyzés szerint $g(n, k)$ értéke minden (n, k) természetes számpárra kiszámítható és ugyanaz lesz az értéke, mint $f(n, k)$ -é. Tehát $f(n, k) = g(n, k)$.

Másrészt a definícióból nyilvánvaló, hogy $n!$ osztója $g(n, k)$ -nak, hiszen bontsuk fel az $\{1, 2, \dots, k\}$ halmazt tetszőlegesen n db nem üres, páronként diszjunkt $A_1, A_2, \dots, A_n$ halmazokra minden lehetséges módon. Minden ilyen felbontásból $n!$ féle módon készíthetünk csoportba osztást: ti. ennyiféleképpen lehet „megszámozni”, hogy az $A_1, \dots, A_n$ halmazok közül melyik legyen az első csoport, melyik a második stb. Nyilván minden csoportbaosztást megkapunk így, s mivel egyik A_i sem üres és nincs köztük átfedés, ezért minden felosztás különböző lesz.

Be kell még bizonyítanunk, hogy $g(0, 0) = 1$, $g(n, 0) = g(0, n) = 0$, ha $n \geq 1$, és $g(n, k) = n[g(n-1, k-1) + g(n, k-1)]$. Nyilvánvaló, hogy ha $k < n$, akkor nincs elég szám, így $g(n, k) = 0$, és az is világos, hogy $g(n, n) = n!$, az n -edrendű permutációk száma. Ebből $g(0, 0) = 1$, és $g(n, n) = n(n-1)! = n[g(n-1, n-1) + g(n, n-1)]$, hiszen $g(n, n-1) = 0$. Legyen most $k > n$, és osszuk fel az $\{1, 2, \dots, k\}$ halmazt n csoportra. Két eset van: 1. A k szám egy külön csoportot képez. 2. A k egy többelemű csoportban van.

Az első esetben n -féle lehetőség van arra, hogy hányadik csoportban legyen a k , s a többi $n-1$ csoportba kell az $1, 2, \dots, k-1$ számokat besorolni úgy, hogy minden csoportba jusson szám; erre $g(n-1, k-1)$ lehetőség van. Az 1. eset tehát $n \cdot g(n-1, k-1)$ -féleképpen jöhet létre.

A második eset annyiféleképpen valósulhat meg, ahányféleképpen az $1, \dots, k-1$ számokat n (nem üres) csoportba lehet osztani (ez $g(n, k-1)$ lehetőség), majd a k számot valamelyik csoportba betenni (ez minden esetben n lehetőség). A 2. eset tehát $n \cdot g(n, k-1)$ -féleképpen valósítható meg. Több eset nem lévén azt kaptuk, hogy

$$g(n, k) = n[g(n, k-1) + g(n-1, k-1)].$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Podoski Károly (Bp., Árpád Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján