

I. megoldás. Minthogy $\sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2}$, először ezt próbáljuk átalakítani, hogy csak $\sqrt{2}$ -es tagok maradjanak:

$$\frac{1}{1 + \sqrt[4]{32} - 5\sqrt{2}} = \frac{1 - 5\sqrt{2} - \sqrt[4]{32}}{(1 - 5\sqrt{2})^2 - \sqrt{32}} = \frac{1 - 5\sqrt{2} - \sqrt[4]{32}}{51 - 14\sqrt{2}}.$$

Most már könnyen gyökteleníthetjük a nevezőt, ha $51 + 14\sqrt{2}$ -vel bővítjük a törtet. Így

$$\frac{1}{1 + \sqrt[4]{32} - 5\sqrt{2}} = \frac{(1 - 5\sqrt{2} - \sqrt[4]{32})(51 + 14\sqrt{2})}{51^2 - 2 \cdot 196} = \frac{(51 + 14\sqrt{2})(1 - 5\sqrt{2} - \sqrt[4]{32})}{2209}.$$

Majthényi Ágnes (Győr, Révai M. Gimn, III o. t)

II. megoldás. A tört nevezője $a + b\sqrt[4]{2} + c(\sqrt[4]{2})^2 + d(\sqrt[4]{2})^3$ alakú, hiszen $1 + \sqrt[4]{32} - 5\sqrt{2} = 1 + 2\sqrt[4]{2} - 5(\sqrt[4]{2})^2$. Képzeljük el, hogy sikerült a törtet gyökteleníteni. Nyilván mindig ilyen alakú számot kapunk. Keressünk tehát olyan a, b, c, d racionális számokat, amelyekre

$$(a + b\sqrt[4]{2} + c(\sqrt[4]{2})^2 + d(\sqrt[4]{2})^3)(1 + 2\sqrt[4]{2} - 5(\sqrt[4]{2})^2) = 1.$$

Az összeszorzás után $\sqrt[4]{2}$ együtthatója $b + 2a - 10d$, $(\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{2}$ együtthatója $2b + c - 5a$, $(\sqrt[4]{2})^3$ együtthatója $d - 2c - 5b$ lesz, míg a „racionális rész” $a - 10c - 4d$. Ha tehát találunk olyan a, b, c, d racionális számokat, amelyekre

$$2a + b - 10d = 0,$$

$$-5a + 2b + c = 0,$$

$$-5b + 2c + d = 0,$$

$$a - 10c + 4d = 1,$$

akkor megoldottuk a feladatot. Valamelyik ismert egyenletrendszer-megoldási módszerrel megoldva az egyenletet $a =$

$$\frac{-89}{2209}, b = \frac{-102}{2209}, c = \frac{-241}{2209}, d = \frac{-28}{2209}$$

adódik megoldásnak. Tehát $\frac{1}{1 + \sqrt[4]{32} - 5\sqrt{2}} = -\frac{89 + 102\sqrt[4]{2} + 241\sqrt{2} + 28\sqrt[4]{8}}{2209}.$

Czikó András (Kisvárd, Bessenyei Gy. Gimn, IV o. t.)