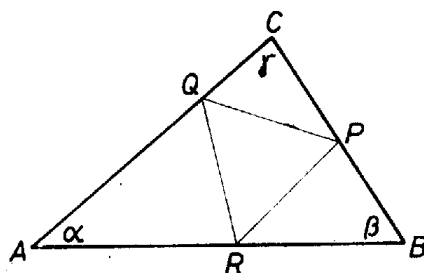
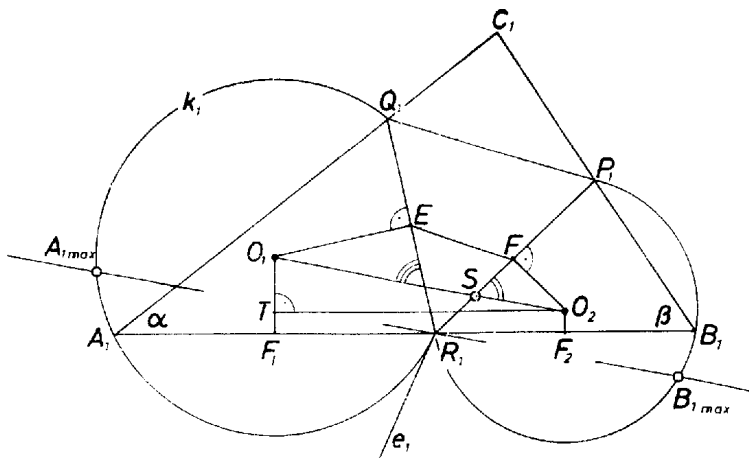


A feladat második követelménye nyilván úgy is megfogalmazható, hogy az ABC és a megszerkesztendő háromszög területének aránya a lehető legnagyobb legyen. Legyenek az ABC háromszög szögei α , β és γ , a szerkesztendő szabályos háromszög csúcsai pedig P , Q , R (1. ábra).



1. ábra

A feladatot úgy fogjuk megoldani, hogy szerkesztünk egy, az ABC háromszöghöz hasonló $A_1B_1C_1$ háromszöget a beírt minimális oldalhosszúságú $P_1Q_1R_1$ szabályos háromszöggel, és ez utóbbit egy alkalmas hasonlósági transzformációval oly módon képezzük le, hogy az A_1 , B_1 , C_1 pontok az A , B , C pontokba menjenek át. A feladatban kívánthoz hasonló ábrát pedig úgy szerkeszthetjük meg, hogy felvesszük a $P_1Q_1R_1$ szabályos háromszöget, és köré írjuk az ABC háromszöghöz hasonló $A_1B_1C_1$ háromszöget úgy, hogy pl. A_1B_1 oldal a lehető legnagyobb legyen. (Így az $A_1B_1C_1$ háromszöghöz képest a $P_1Q_1R_1$ szabályos háromszög oldalhosszúsága minimális lesz.)



2. ábra

Föltehető, hogy α és β hegyesszög. Az A_1 csúcsot a Q_1R_1 szakasz fölötti α szögű, O_1 középpontú, a B_1 csúcsot az R_1P_1 fölötti, β szögű, O_2 középpontú látóköríveken kereshetjük, és e körívekből az A_1 és B_1 pontokat egy R_1 -en átmenő egyenes metszi ki. A 2. ábrán a lehetséges 4 látókörívből kettőt rajzoltunk meg. (Mint később látni fogjuk, ez elegendő lesz.) Legyen az A_1R_1 , illetve R_1B_1 szakasz felezőpontja F_1 , illetve F_2 , O_2 merőleges vetülete az F_1O_1 egyenesen pedig T . Világos, hogy

$$O_1O_2 \geq TO_2 = F_1F_2 = \frac{1}{2}A_1B_1,$$

ezért A_1B_1 akkor lesz maximális, ha párhuzamos O_1O_2 -vel. A lehetséges négy látókörív közül az ábrán láthatóak esetén lesz O_1O_2 a legnagyobb, ezért a két másik látókörívet nem kell figyelembe venni.

A szerkesztést a 2. ábra alapján könnyen elvégezhetjük.

A feladatnak legfeljebb egy megoldása lehet, mert (az A_1B_1 oldalként) R_1 -en át O_1O_2 -vel egyetlen párhuzamos húzható. Felmerülhet a kérdés, hogy ez a párhuzamos metszi-e mindkét látókörívet. Legyen az α látószögű k_1 ív R_1 pontbeli érintője e_1 . Az ábrán megrajzolt e_1 félegyenes és Q_1R_1 szöge $180^\circ - \alpha$. Az O_1EFO_2 négyszögben az E és F csúcsoknál lévő szögek összege 300° , ezért a másik két szög összege 60° (így mindegyikük 60° -nál kisebb). Ebből következik, hogy az ábrán két, ill. három ívvel jelölt szög nagyobb, mint 30° . Ezért, ha az R_1 -en át O_1O_2 -vel húzott párhuzamos nem metszené pl. a k_1 kört, akkor fennállna a következő:

$$\begin{aligned} (180^\circ - \alpha) + 60^\circ + 30^\circ &< (180^\circ - \alpha) + 60^\circ + FSO_2 < \\ &= F_1R_1E + ER_1S + FSO_2 < 180^\circ, \end{aligned}$$

azaz

$$\alpha > 90^\circ,$$

ami ellentmondás, hiszen α hegyesszög. Ezért az A_1 , B_1 metszéspontok mindig léteznek, a feladatnak tehát pontosan egy megoldása van.