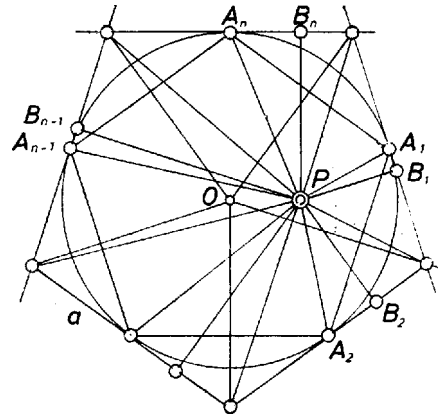


Húzzuk meg a körnek a csúcsokhoz tartozó érintőit. Ezek az érintők az r sugarú kör köré írt szabályos n -szög oldalegyenesei. Állítsunk merőlegeseket P -ből ezekre az oldalegyenesekre, és legyenek a talppontok $B_1, B_2, \dots, B_n$.



Fejezzük ki az érintősokszög területét kétféleképpen, és pedig úgy, hogy a sokszöget P csúcsú, illetve O csúcsú háromszögekre bontjuk – ahol O a kör középpontja – és mindegyik háromszög alapja a körülírt sokszög egy-egy oldala. Jelöljük a körülírt sokszög oldalát a -val, ekkor a kétszeres területe:

$$(1) \quad \begin{aligned} a \cdot PB_1 + a \cdot PB_2 + \dots + a \cdot PB_n &= n \cdot a \cdot r, \quad \text{így} \\ PB_1 + PB_2 + \dots + PB_n &= n \cdot r. \end{aligned}$$

A $PA_i B_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) esetleg elfajuló derékszögű háromszögben

$$(2) \quad PA_i \geq PB_i, \quad \text{tehát}$$

$$(3) \quad PA_1 + PA_2 + \dots + PA_n \geq PB_1 + PB_2 + \dots + PB_n,$$

ezért (1) alapján

$$(4) \quad PA_1 + PA_2 + \dots + PA_n \geq n \cdot r,$$

amint ezt bizonyítani kellett.

Világos, hogy (3)-ban és (4)-ben csak akkor lehet egyenlőség, ha (2)-ben az $i = 1, 2, \dots, n$ esetek mindegyikére egyenlőség érvényes; ez pedig nyilván csak akkor következik be, ha P egybeesik a kör középpontjával.

Megjegyzés. Ha n páros, a feladat állítása egyszerűbben is belátható. Nyilvánvaló ugyanis, hogy ha A_i és A_k átellenes csúcsok, akkor

$$PA_i + PA_k \geq 2r.$$

Az összes különböző ilyen egyenlőtlenséget összegezve kapjuk a bizonyítandó állítást.

Benkő Dávid (Bp., Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján