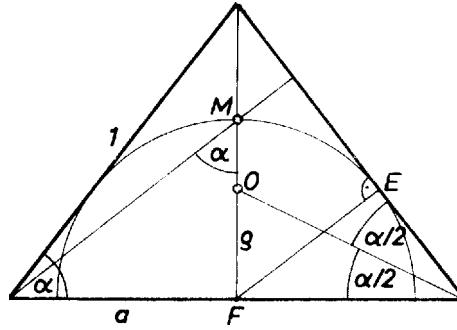


Legyen a háromszögbe írt kör középpontja O , sugara ϱ , és használjuk az ábra további jelöléseit is.



Az ábra alapján rögtön láthatjuk, hogy

$$a = \cos \alpha,$$

továbbá

$$\varrho = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Vizsgáljuk ϱ értékét α függvényeként. Ez a függvény a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban folytonos, tehát ott van maximuma.

Tekintve, hogy a függvény az intervallum végpontjaiban zérus, egyéb helyeken pedig pozitív, maximumát a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nyílt intervallumban veszi fel. Világos, hogy ϱ deriválható függvénye α -nak, ezért a keresett maximum olyan helyen lehet, ahol $\varrho' = 0$. Deriválás előtt ϱ fenti kifejezését kissé átalakítjuk. Ehhez felhasználjuk a $\cos \alpha = 2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$ és a $\sin \alpha = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$ azonosságokat.

$$\varrho = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left(2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right) = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

A derivált:

$$\varrho' = \cos \alpha - \frac{1}{2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Az előbb használt azonosságok közül az elsőt ismét alkalmazva:

$$\varrho' = \cos \alpha - \frac{1}{1 + \cos \alpha}.$$

A szélsőérték helyét így a

$$\cos \alpha - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = 0$$

egyenletből kaphatjuk meg, azaz:

$$(1) \quad \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0,$$

innen

$$\cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Mivel $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, s így a háromszög alapja $2a = \sqrt{5} - 1$. A $\cos \alpha$ függvény a szóban forgó intervallumban kölcsönösen egyértelmű, ezért egyetlen olyan α létezik, amely mellett ϱ maximális. (Azt, hogy létezik ilyen α , korábban már megindokoltuk.)

Nézzük ezután az alapra rajzolt és a száracakat érintő félkört. Ennek sugara FE . A feladat második állítása azt jelenti, hogy a maximális ϱ mellett $FM = FE$. Tudjuk, hogy a maximális ϱ értékhez tartozó α -ra fennáll (1), azaz

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos \alpha &= 1, \text{ és így} \\ \cos^2 \alpha + \cos \alpha &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha, \quad \text{amiből} \\ \cos \alpha &= \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Ennek az egyenletnek mindkét oldalát $\operatorname{ctg} \alpha$ -val szorozva :

$$(2) \quad \cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Az ábráról könnyen leolvasható, hogy $FM = \cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ és $FE = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, ezért (2) éppen azt jelenti, hogy $FM = FE$.