

I. megoldás. Jelöljük k -val a háromszög területét. Ekkor

$$\begin{aligned} k^2 &= (a+b+c)^2 = (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ac) = \\ &= \frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(b-c)^2 + \frac{1}{2}(c-a)^2 + 3(ab+ac+bc). \end{aligned}$$

Az $ab+ac+bc=12$ feltételt is figyelembe véve kapjuk, hogy

$$(1) \quad 2k^2 - 72 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

Itt a jobb oldal nem negatív, tehát $k^2 \geq 36$, $k \geq 6$, és egyenlőség csak $a=b=c$ esetén áll. Másrészt $a=b=c=2$ esetén $k=6$ és $ab+bc+ca=12$, így a terület *minimuma* 6.

A maximum meghatározásához is (1)-et fogjuk használni. A háromszög-egyenlőtlenséget írhatjuk a következő alakban is:

$$(2) \quad |a-b| \leq c, \quad |b-c| \leq a \quad \text{és} \quad |a-c| \leq b.$$

Így (1) jobb oldala nem nagyobb $c^2+a^2+b^2=k^2-2(ab+bc+ca)=k^2-24$ -nél, vagyis

$$2k^2 - 72 \leq k^2 - 24, \quad k^2 \leq 48, \quad k \leq \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

Ezzel kaptunk egy felső becslést a területre. Kérdés: felveszi-e k ezt az értéket? Nyilván pontosan akkor veszi fel, ha (2)-ben mindenütt egyenlőség van, amihez meg kell engednünk az elfajuló háromszögeket is. Ha ezt megengedjük és feltesszük, hogy $a \geq b \geq c$, akkor azt kapjuk, hogy k a maximális $4\sqrt{3}$ értéket pontosan akkor veszi fel, ha $a-b=c$, $b-c=a$ és $a-c=b$. Az első két egyenletet összeadva $c=0$ adódik, s ebből (mindhárom egyenletben) $a=b$ következik. Végül az $ab+ac+bc=12$ feltétel $c=0$, $a=b$ mellett azt adja, hogy $a=b=2\sqrt{3}$.

Azt kaptuk tehát, hogy a terület hossza legfeljebb $4\sqrt{3}$, és pontosan $4\sqrt{3}$ abban az elfajuló egyenlő szárú háromszögben lesz, amelynek alapja 0, két szára $2\sqrt{3}$ hosszú. A terület értéke tehát 6 és $4\sqrt{3}$ között változik.

II. megoldás. A számtani és négyzetes közép közötti összefüggés szerint

$$\left(\frac{k}{3}\right)^2 = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

tehát

$$k^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) = 3(k^2 - 2(ab+bc+ca)) = 3k^2 - 72,$$

és innen $k^2 \geq 36$, $k \geq 6$. Itt egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a=b=c=2$, tehát a terület minimuma 6.

A maximum megkereséséhez tegyük fel, hogy $a \geq b \geq c$. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség szerint $a \leq b+c$, amit a nemnegatív a -val szorozva azt kapjuk, hogy

$$a^2 \leq ab+ac \leq ab+ac+bc=12.$$

Másrészt $b \geq c \geq 0$ miatt $c^2 \leq bc$ és $a \geq b \geq 0$ miatt $b^2 \leq ab$, tehát

$$b^2+c^2 \leq ab+bc \leq ab+ac+bc=12.$$

A két egyenlőséget összeadva

$$a^2+b^2+c^2 \leq 24,$$

vagyis $k^2 - 2(ab+ac+bc) \leq 24$, $k^2 - 24 \leq 24$, $k^2 \leq 48$. Ha végignézzük, hogy milyen feltétellel áll egyenlőség az összeadott két egyenlőtlenségben, ismét könnyen láthatjuk, hogy csak $c=0$, $b=a$ esetén.

Megjegyzés. Be lehet látni, hogy a terület hossza 6 és $4\sqrt{3}$ között bármely értéket felvesz, és a $4\sqrt{3}$ kivételével minden értéket felvesz *nem* elfajuló háromszögben is.