I. megoldás. Először azt bizonyítjuk be, hogy ha n pozitív egész, akkor 5^{2n} felbontható két olyan négyzetszám összegére, amelyek egyike sem osztható 5-tel. Teljes indukciót alkalmazunk. Az $n=1$ esetben

$$5^2 = 25 = 3^2 + 4^2.$$

Tegyük fel, hogy $n=k$-ra igaz az állítás, tehát

$$5^{2k} = a_k^2 + b_k^2, \tag{1}$$

és $a_k b_k$ nem osztható 5-tel. Ekkor $3a_k + 4b_k$ és $3a_k - 4b_k$ közül legalább az egyik nem osztható 5-tel, mert összegük $6a_k$ sem osztható 5-tel. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$(3a_k+4b_k)^2 + (4a_k+3b_k)^2 = (3a_k-4b_k)^2 + (4a_k+3b_k)^2 =$$
$$= (3^2+4^2)(a_k^2+b_k^2) = 5^2 5^{2k} = 5^{2(k+1)}.$$

Legyen tehát $a_{k+1} = 3a_k + 4b_k$ és $b_{k+1} = 4a_k - 3b_k$, ha $3a_k + 4b_k$ nem osztható 5-tel, ellenkező esetben legyen $a_{k+1} = 3a_k - 4b_k$ és $b_{k+1} = 4a_k + 3b_k$. Ekkor, mint láttuk, $5^{2(k+1)} = a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2$, és a_{k+1} nem osztható 5-tel. De akkor $5^{2(k+1)} - a_k = b_k$ sem osztható 5-tel, így b_{k+1} sem. Ezzel beláttuk, hogy $n \geqq 1$ esetén 5^{2n}-nek van olyan $a_n^2 + b_n^2$ alakú felbontása, ahol $a_n b_n$ nem osztható 5-tel.

Ezután már könnyű bizonyítani, hogy 5^{2n} (legalább) n különböző módon áll elő két négyzetszám összegeként. Ha ugyanis k pozitív egész, és nem nagyobb n-nél, akkor

$$5^{2n} = 5^{2k}5^{2(n-k)} = (a_k^2 + b_k^2)(5^{n-k})^2 = (5^{n-k}a_k) + (5^{n-k}b_k).$$

Itt $5^{n-k}a_k$ és $5^{n-k}b_k$ egész és 5^{2n}-nek pontosan $(n-k)$-adik hatványával osztható. Ebből viszont következik, hogy ez az elő állítás minden k-ra különböző. Minthogy k éppen n darab különböző értéket vehet fel, találtunk 5^{2n}-nek n különböző előállítását két négyzetszám összegeként.

II. megoldás. Legyen j pozitív egész, és tekintsük az $a_j = 4j$, $b_j = 4j^2 - 1$, $c_j = 4j^2 + 1$ számhármast. Könnyen ellenőrizhető, hogy $a_j^2 + b_j^2 = 16j^2 + (4j^2-1)^2 = (4j^2+1)^2 = c_j^2$, tehát pitagoraszi számhármasról van szó. Legyen $s_n = c_1 c_2 \ldots c_n = (4\cdot 1^2+1)(4\cdot 2^2+1)\ldots(4n^2+1)$. Azt állítjuk, hogy ekkor $t_n = s_n^2$ legalább n különböző módon áll elő két négyzetszám összegeként.

Nyilvánvaló ugyanis, hogy az $a_j^2 + b_j^2 = c_j^2$ egyenleteket c_j^2-tel osztva és s_n^2-tel szorozva a következő n darab egyenlethez jutunk:

$$\begin{aligned} \left(a_1\frac{s_n}{c_1}\right)^2 + \left(b_1\frac{s_n}{c_1}\right)^2 &= s_n^2 = t_n \\ \left(a_j\frac{s_n}{c_j}\right)^2 + \left(b_j\frac{s_n}{c_j}\right)^2 &= s_n^2 = t_n \\ &\vdots \\ \left(a_n\frac{s_n}{c_n}\right)^2 + \left(b_n\frac{s_n}{c_n}\right)^2 &= s_n^2 = t_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Itt $\dfrac{s_n}{c_j}$ az s_n definíciója miatt egész, tehát a fenti n egyenlet t_n-nek n darab előállítását adja meg két négyzetszám összegeként. Be kell látnunk, hogy n *különböző* egyenletről van szó. Világos, hogy $b_1 < a_1$, tehát $b_1\dfrac{s_n}{c_1} < a_1\dfrac{s_n}{c_1}$, és $j \geqq 2$ esetén a $a_j = 4_j < 4_j^2 - 1 = b_j$, így a $a_j\dfrac{s_n}{c_j} < b_j\dfrac{s_n}{c_j}$. Elég azt belátnunk, hogy $\dfrac{a_1}{c_1}s_n, \dfrac{a_2}{c_2}s_n, \ldots, \dfrac{a_j}{c_j}s_n, \ldots, \dfrac{a_n}{c_n}s_n$ páronként különböző számok. Ez pedig abból következik, hogy az $\dfrac{a_j}{c_j} = \dfrac{1}{j + \dfrac{1}{4j}}$ sorozat szigorúan monoton csökken.

Ezzel beláttuk, hogy $t_n = s_n^2$ valóban (legalább) n különböző módon bontható fel két négyzetszám összegeként.

III. megoldás. Az előbbi megoldás gondolatát némileg általánosítva, azt látjuk be, hogy ha

$$(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \ldots, (a_n, b_n, c_n)$$

n darab különböző, de egyébként tetszőleges ún. primitív pitagoraszi számhármas (azaz $a_j^2 + b_j^2 = c_j^2$ és a_j, b_j, c_j páronként relatív prímek $j = 1, 2, \ldots,\ n$-re), akkor $t_n = s_n^2 = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ legalább n különböző módon áll elő két négyzetszám összegeként. Az (1) alatt felírt n egyenlet ugyanis most is fennáll, és $a_j\dfrac{s_n}{c_j}$, $b_j\dfrac{s_n}{c_j}$ most is egész. Azt kell csak belátnunk, hogy ez az n egyenlet most is n ***különböző*** egyenlet. Nyilván feltehetjük, hogy $a_j < b_j$, s ekkor elég azt belátni, hogy az $\dfrac{a_j s_n}{c_j}$ számok páronként különböznek. Tegyük fel,hogy $\dfrac{a_i s_n}{c_i} = \dfrac{a_j s_n}{c_j}$. Ekkor $a_i c_j = a_j c_i$. De itt a_i és c_i relatív prímek, ezért a_j osztható a_i-vel. Másrészt a_i is osztható a_j-vel, tehát $a_i = a_j$. Ebből viszont $c_i = c_j$ következik, tehát az (a_i, b_i, c_i) és az (a_j, b_j, c_j) számhármas azonos, ezért $i = j$. Az $\dfrac{a_j s_n}{c_j}$ számok tehát valóban páronként különbözők.

Ezzel beláttuk, hogy t_n valóban (legalább) n különböző módon áll elő két négyzetszám összegeként.

Mezei József (Bp. Berzsenyi D. Gimn. IV. o.)

Megjegyzés. Mélyebb számelméleti módszerekkel megmutatható a következő. Ha $m = 2^\alpha \cdot p_1^{\alpha_1} q \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} \cdot q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_s^{\beta_s}$, ahol $p_1, p_2, \dots, p_r$ m-nek a $4k+1$ alakú prímosztói, $q_1, q_2, \dots, q_s$ pedig a $4k-1$ alakú prímosztói, és $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ párosak, akkor m felbontható két négyzetszám összegeként, mégpedig $4(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_r+1)$-féle módon. Itt akkor is különbözőknek tekintjük a felbontásokat, ha csak sorrendben vagy előjelben térnek el egymástól. Pl. $m = 5^{2n}$-nek az első megoldásban kapott minden előállítása nyolc előállításnak számít: $\left(\pm 5^{n-k} a_k\right)^2 + \left(\pm 5^{n-k} b_k\right)^2$ és $\left(\pm 5^{n-k} b_k\right)^2 + \left(\pm 5^{n-k} a_k\right)^2$. Ezenkívül $m = 5^{2n}$-nek van még négy triviális előállítása: $5^{2n} = (\pm 5^n)^2 + 0^2 = 0^2 + (\pm 5^n)^2$. Így 5^{2n}-nek $8n+4$ előállítását találtuk meg. A fenti tétel szerint $m = 5^{2n}$ $4(2n+1)$-féleképpen állítható elő, tehát ebben az esetben az összes előállítást megtaláltuk. Az II. és III. megoldásban viszont ez korántsem teljesül.