

A két egyenlet a következő alakra hozható:

$$(1) \quad a^2 + \frac{(b-4)^2}{4} = 1, \quad \text{illetve}$$

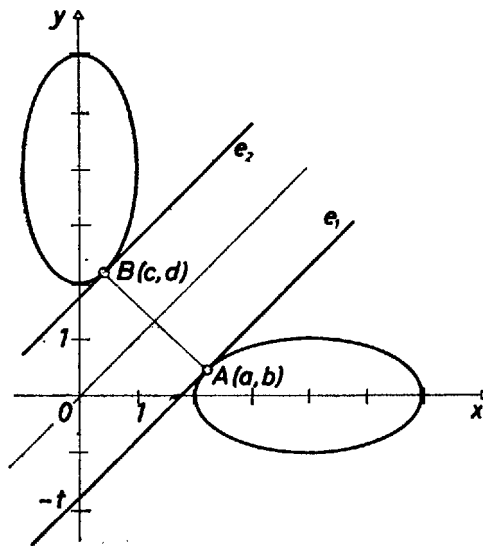
$$(2) \quad \frac{(c-4)^2}{4} + d^2 = 1.$$

Az (1) egyenlet a $(0;4)$ középpontú és 1 egység, illetve 2 egység féltengelyekkel rendelkező ellipszis egyenletének tekinthető, míg (2) a $(4;0)$ középpontú és 2 egység, illetve 1 egység féltengelyekkel rendelkező ellipszis egyenlete. Ezért a feladat kérdése azt jelenti, hogy az

$$(3) \quad x^2 + \frac{(y-4)^2}{4} = 1 \quad \text{és az}$$

$$(4) \quad \frac{(x-4)^2}{4} + y^2 = 1.$$

egyenletű ellipszisek $A(a;b)$ illetve $B(c;d)$ pontjai közötti minimális távolság négyzetét kell meghatározni, ahol A a (3), B pedig a (4) ellipszis egy pontja.



A két ellipszis szimmetrikus az $y = x$ egyenletű egyenesre, ezért a pontjaik közötti minimális távolság a szimmetriatengellyel párhuzamos érintők közül a két közelebbinek a távolsága lesz. Ezek az érintők az ábra e_1 , illetve e_2 egyenesei, amelyeknek egyenlete $y = x - t$ alakú. Ha az $y = x - t$ egyenes érintő, akkor ebből az egyenletből és pl. a (4)-ből alkotott egyenletrendszernek pontosan egy megoldása lesz, tehát az

$$\frac{(x-4)^2}{4} + (x-t)^2 = 1$$

egyenlet diszkriminánsa zérus. Ez az egyenlet:

$$5x^2 - 8(t+1)x + (4t^2 + 12) = 0,$$

ennek diszkriminánsa nulla:

$$64(t+1)^2 - 4 \cdot 5(4t^2 + 12) = 0,$$

$$t^2 - 8t + 11 = 0,$$

$$t = 4 \pm \sqrt{5}.$$

A szimmetriatengelyhez közelebbi érintőhöz tartozó t érték nyilván $t = 4 - \sqrt{5}$.

Mivel a szimmetriatengely és az e_2 érintő az abszcissa-tengellyel 45° -os szöget zár be, ezért a két egyenes távolsága

$$\frac{4 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \quad (\approx 1,247), \quad \text{így } (a-c)^2 + (b-d)^2 \text{ minimuma:}$$

$$\left(\frac{2(4 - \sqrt{5})}{\sqrt{2}} \right)^2 = 42 - 16\sqrt{5} = 2,495^2.$$