

A két állítást (F. 2712. és F. 2717. feladat) együtt bizonyítjuk. Legyen

$$S_{n,k} = \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n}{i} i^k.$$

Belátjuk, hogy ha  $n \geq 2$ , akkor

$$(1) \quad S_{n,0} = -1, \quad S_{n,k} = 0, \quad \text{ha} \quad 0 < k < n \quad \text{és} \quad S_{n,n} = (-1)^n n!$$

(Ebből  $n = 100$  helyettesítéssel következik mindkét feladat állítása.)

**I. bizonyítás.**  $n$ -re vonatkozó teljes indukciót alkalmazunk.

$n = 2$ -re:

$$\begin{aligned} S_{2,0} &= (-1)^1 \binom{2}{1} \cdot 1^0 + (-1)^2 \binom{2}{2} \cdot 2^0 = -2 + 1 = -1, \\ S_{2,1} &= (-1)^1 \binom{2}{1} \cdot 1 + (-1)^2 \binom{2}{2} \cdot 2 = -2 + 2 = 0, \\ S_{2,2} &= (-1)^1 \binom{2}{1} \cdot 1^2 + (-1)^2 \binom{2}{2} \cdot 2^2 = -2 + 4 = 2 = (-1)^2 \cdot 2! \end{aligned}$$

Legyen ezután  $n \geq 3$ , és tegyük fel, hogy  $n$  helyett  $n-1$ -et írva (1) igaz. A binomiális tétel alapján

$$S_{n,0} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \cdot i^0 = \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n}{i} 1^{n-i} = (1-1)^n - 1 = -1.$$

Legyen  $k > 0$ . Ha  $1 \leq i \leq n$ , akkor  $\binom{n}{i} = \frac{n}{i} \cdot \binom{n-1}{i-1}$ , így

$$S_{n,k} = n \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n-1}{i-1} \cdot i^{k-1} = -n \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} \cdot (j+1)^{k-1},$$

ahol  $(i-1)$  helyett  $j$ -t írtunk. A  $j=0$  értékhez tartozó tag a szummában  $(-1)^0 \binom{n-1}{0} 1^{k-1} = 1$ , ezt leválasztva

$$S_{n,k} = -n \left( 1 + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} (j+1)^{k-1} \right).$$

Itt a szumma már erősen emlékeztet  $S_{n-1,k-1}$ -re, csak éppen  $j^{k-1}$  helyett  $(j+1)^{k-1}$  áll. Ám ha ezt a binomiális tétel szerint kifejtjük,  $S_{n-1,t}$  alakú tagok összegéhez jutunk:

$$\begin{aligned} S_{n,k} &= -n \left( 1 + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} \left( j^{k-1} + \binom{k-1}{1} j^{k-2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \binom{k-1}{2} j^{k-3} + \dots + \binom{k-1}{t} j^{k-t-1} + \dots + \binom{k-1}{k-1} j^0 \right) \right) = \\ &= -n \left( 1 + \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n-1}{j} j^{k-1} + \binom{k-1}{1} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} j^{k-2} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \binom{k-1}{t} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} j^{k-t-1} + \dots \right) = \\ &= -n \left( 1 + S_{n-1,k-1} + \binom{k-1}{1} S_{n-1,k-2} + \binom{k-1}{2} S_{n-1,k-3} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \binom{k-1}{t} S_{n-1,k-1-t} + \dots + S_{n-1,0} \right). \end{aligned}$$

Ha  $k < n$ , akkor  $k-1 < n-1$ ,  $k-2 < n-1$  stb., így a zárójelben az indukciós feltevés szerint az utolsó kivételével mindegyik  $S$  nulla, az utolsó  $-1$ , tehát a zárójeles összeg értéke nulla. Ezért  $S_{n,k} = 0$ , ha  $1 \leq k < n$ .

Ha  $k = n$ , akkor csak annyi a különbség, hogy az első  $S$  értéke indukciós feltevésünk értelmében  $(-1)^{n-1}(n-1)!$ , a többi tag az utolsó kivételével most is nulla, az utolsó  $-1$ , így a zárójeles összeg értéke ezúttal  $(-1)^{n-1}(n-1)!$ , ezért  $S_{n,n} = -n(-1)^{n-1}(n-1)! = (-1)^n n!$ , amit bizonyítani akartunk.

*Révész Gabriella* (Komárom, Jókai M. Gimn., IV. o. t.)  
dolgozata nyomán

**II. bizonyítás.** Csak  $k \geq 1$ -re bizonyítjuk (1)-et. Tekintsük azt a feladatot, hogy hányféleképpen osztható el  $k$  db kártya  $n$  darab borítékba úgy, hogy mindegyik borítékba kerüljön kártya (a borítékok és kártyák megkülönböztethetők).  $k$  db kártyát  $n$  borítékba  $n^k$ -féleképpen oszthatunk el, de ebből le kell vonnunk azokat az eseteket, amikor legfeljebb  $n-1$  borítékba került csak kártya. Az  $n-1$  borítékot  $\binom{n}{n-1}$ -féleképpen választhatjuk ki, s minden választásnál  $(n-1)^k$ -féleképpen oszthatók el a kártyák, összesen tehát  $\binom{n}{n-1}(n-1)^k$  esetet kell levonnunk. Most azonban többször vontuk le azokat az eseteket, amelyekben (legfeljebb)  $n-2$  borítékba került kártya, így az előzőhöz hasonló megfontolásból hozzá kell adnunk  $\binom{n}{n-2}(n-2)^k$  esetet. A *logikai szita*-formula szerint ezt az eljárást folytatva megkapjuk a jó esetek számát, ami

$$n^k - \binom{n}{n-1}(n-1)^k + \binom{n}{n-2}(n-2)^k - \binom{n}{n-3}(n-3)^k + \dots + (-1)^t \binom{n}{n-t} (n-t)^k + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 0^k.$$

$k \geq 1$ , így  $0^k = 0$ , tehát a keresett szám ( $i = n-t$  helyettesítéssel)

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k = (-1)^n \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n}{i} i^k = (-1) S_{n,k}.$$

Ha  $k < n$ , akkor  $k$  kártyát akárhogyan teszünk is  $n$  borítékba, marad üres boríték; a fenti szám tehát nulla, s így  $S_{n,k} = 0$ .

Ha  $k = n$ , akkor a jó esetek száma az  $n$  elemű permutációk száma,  $n!$ , tehát  $(-1)^n S_{n,n} = n!$ , ahonnan  $S_{n,n} = (-1)^n n!$ , amit bizonyítani kellett.

*Mohai Zsuzsanna* (Dombóvár, Gőgös I. Gimn., IV. o. t.)  
dolgozata nyomán

*Megjegyzések.* 1. A logikai szita-formula és annak bizonyítása megtalálható *Hajós Gy. – Neukomm Gy. – Surányi J.:* Matematikai versenytételek I. rész 124–125. oldalán. Ugyanitt olvasható annak a bizonyítása is, hogy  $S_{n,n} = (-1)^n n!$ , és a bizonyításból könnyen megkapható a többi (1) alatti állítás is.

2. Mindkét megoldás módszerével igazolhatjuk, hogy  $S_{n,n+1} = (-1)^n (n+1)! \frac{n}{2}$ , azaz  $(n+1)! \frac{n}{2}$ -féleképpen osztható el  $n+1$  kártya pontosan  $n$  borítékba.

3. Olvasóink bizonyára észrevették, hogy a 2712. feladat az októberi számunkban kitűzött 2704. feladatnak az általánosítása.