

$x = \pi$ -re a bal oldal értéke $(-1)^n$, ezért n csak páros szám lehet; legyen $n = 2k$.

Az $f: x \mapsto \sin^{2k} x + \cos^{2k} x$ függvény periodikus, és a periódus hossza $\frac{\pi}{2}$, hiszen

$$\sin^{2k} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos^{2k} x, \quad \cos^{2k} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin^{2k} x.$$

Az is látható, hogy az f függvény a $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ intervallumon $\pi/4$ -re szimmetrikus, azaz

$$f(\pi/2 - x) = \sin^{2k}(\pi/2 - x) + \cos^{2k}(\pi/2 - x) = \cos^{2k} x + \sin^{2k} x = f(x).$$

Mivel $f(x)$ minimális értékére van szükségünk, elég f -et a $[0, \pi/4]$ intervallumban vizsgálni. Ha x -et ebből az intervallumból választjuk, akkor x felírható $x = \pi/4 - y$ alakban, ahol $0 \leq y \leq \pi/4$. Ezzel

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin^2(\pi/4 - y))^k + (\cos^2(\pi/4 - y))^k = \\ &= \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos y - \sin y) \right)^2 \right)^k + \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos y + \sin y) \right)^2 \right)^k = \\ &= \frac{1}{2^k} ((1 - \sin 2y)^k + (1 + \sin 2y)^k). \end{aligned}$$

A k -adik hatványokat a binomiális tétellel kiszámolva, összevonás után a negatív tagok kiesnek, és a nem negatív tagok elhagyásával az összeg nem növekszik:

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= \frac{1}{2^k} \left(\left(1 - \binom{k}{1} \sin 2y + \binom{k}{2} \sin^2 2y - \dots \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \binom{k}{1} \sin 2y + \binom{k}{2} \sin^2 2y + \dots \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2^{k-1}} \left(1 + \binom{k}{2} \sin^2 2y + \binom{k}{4} \sin^4 2y + \dots \right) \geq \frac{1}{2^{k-1}}. \end{aligned}$$

Az alsó becslésként kapott $\frac{1}{2^{k-1}}$ éppen $f(\pi/4)$; így azt a legnagyobb k természetes számot kell megtalálnunk, amelyre

$$(2) \quad \frac{1}{2^{k-1}} \geq \frac{1}{2k}.$$

Könnyen látható, hogy $k \leq 4$ esetén (2) teljesül, $k = 5$ -re pedig az egyenlőtlenség már nem áll fenn. Ha pedig egy t (4-nél nagyobb) pozitív egészre $\frac{1}{2^{t-1}} < \frac{1}{2t}$, akkor $\frac{1}{2^{(t+1)-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{t-1}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2t} < \frac{1}{2(t+1)}$, azaz $(t+1)$ -re sem teljesül az egyenlőtlenség. Így a (2) összefüggést kielégítő legnagyobb természetes szám a 4, feladatunk kérdésére tehát $n = 2 \cdot 4 = 8$ a válasz.

Megjegyzés. A megoldásban kulcsszerepet játszó (1) becsléshez más módszerrel is eljuthatunk. Kiszámíthatjuk az f függvény deriváltját, amelyről könnyen igazolhatjuk, hogy a $[0, \pi/4]$ -ben nem pozitív. Használhatjuk továbbá a k -adik hatványközepre és a számtani közepre vonatkozó egyenlőtlenséget is, amely szerint

$$\sqrt[k]{\frac{(\sin^2 x)^k + (\cos^2 x)^k}{2}} \geq \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2} = \frac{1}{2}.$$