

Érintse a tetraéder beírt gömbje a BCD lapot a G , az ACD lapot a H pontban. Használjuk az ábra további jelöléseit is. Mivel egy külső pontból a gömbhöz húzott érintőszakaszok egyenlőek,

$$AE = AF \quad \text{és} \quad BE = BF.$$

Ezért az ABE és ABF háromszögek egybevágók, hiszen oldalaik páronként egyenlők. Ebből következik, hogy $\angle AEB = \angle AFB$; ezeket a szögeket az ábrán α -val jelöltük.

Ugyanígy megmutathatók a következő egybevágóságok:

$$BCE \triangle \cong BCG \triangle$$

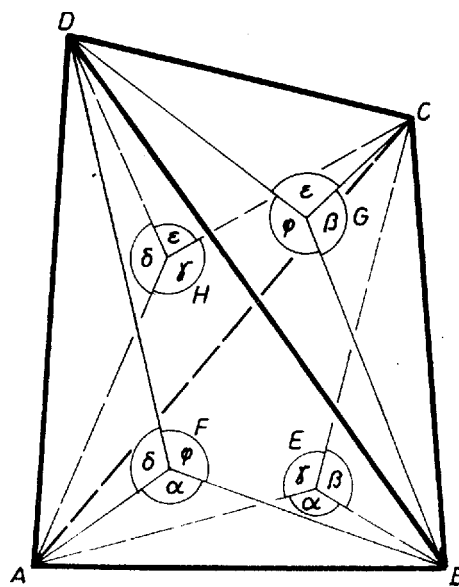
$$ACE \triangle \cong ACH \triangle$$

$$ADF \triangle \cong ADH \triangle$$

$$CDG \triangle \cong CDH \triangle$$

$$BDF \triangle \cong BDG \triangle$$

és ezekből az egybevágóságokból adódik az ábrán azonos betűvel jelölt szögek egyenlősége.



Az E, F, G és H érintési pontok mindegyike a tetraéder egy-egy lapjának belső pontja, ezért

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$$

$$\beta + \varphi + \varepsilon = 2\pi$$

$$\gamma + \delta + \varepsilon = 2\pi$$

$$\alpha + \delta + \varphi = 2\pi.$$

Az első két egyenletből

$$\alpha + \gamma = \varphi + \varepsilon,$$

a másik két egyenletből pedig

$$\alpha + \varphi = \gamma + \varepsilon.$$

E két utóbbi egyenletből

$$\gamma = \varphi, \quad \text{azaz} \quad \angle AEC = \angle BFD.$$

Ezt kellett bizonyítanunk.