

A két állítást (F. 2712. és F. 2717. feladat) együtt bizonyítjuk. Legyen

$$S_{n,k} = \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n}{i} i^k.$$

Belátjuk, hogy ha $n \geq 2$, akkor

$$(1) \quad S_{n,0} = -1, \quad S_{n,k} = 0, \quad \text{ha } 0 < k < n \text{ és } S_{n,n} = (-1)^n n!$$

(Ebből $n = 100$ helyettesítéssel következik mindkét feladat állítása.)

I. bizonyítás. n -re vonatkozó teljes indukciót alkalmazunk.
 $n = 2$ -re:

$$S_{2,0} = (-1)^1 \binom{2}{1} \cdot 1^0 + (-1)^2 \binom{2}{2} \cdot 2^0 = -2 + 1 = -1,$$

$$S_{2,1} = (-1)^1 \binom{2}{1} \cdot 1 + (-1)^2 \binom{2}{2} \cdot 2 = -2 + 2 = 0,$$

$$S_{2,2} = (-1)^1 \binom{2}{1} \cdot 1^2 + (-1)^2 \binom{2}{2} \cdot 2^2 = -2 + 4 = 2 = (-1)^2 \cdot 2!$$

Legyen ezután $n \geq 3$, és tegyük fel, hogy n helyett $n - 1$ -et írva (1) igaz. A binomiális tétel alapján

$$S_{n,0} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \cdot i^0 = \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n}{i} 1^{n-i} = (1 - 1)^n - 1 = -1.$$

Legyen $k > 0$. Ha $1 \leq i \leq n$, akkor $\binom{n}{i} = \frac{n}{i} \cdot \binom{n-1}{i-1}$, így

$$S_{n,k} = n \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n-1}{i-1} \cdot i^{k-1} = -n \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} \cdot (j+1)^{k-1},$$

ahol $(i-1)$ helyett j -t írtunk. A $j = 0$ értékhez tartozó tag a szummában $(-1)^0 \binom{n-1}{0} 1^{k-1} = 1$, ezt leválasztva

$$S_{n,k} = -n \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} (j+1)^{k-1} \right).$$

Itt a szumma már erősen emlékeztet $S_{n-1,k-1}$ -re, csak éppen j^{k-1} helyett $(j+1)^{k-1}$ áll. Ám ha ezt a binomiális tétel szerint kifejtjük, $S_{n-1,t}$ alakú tagok összegéhez jutunk:

$$\begin{aligned} S_{n,k} &= -n \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} \left(j^{k-1} + \binom{k-1}{1} j^{k-2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \binom{k-1}{2} j^{k-3} + \dots + \binom{k-1}{t} j^{k-t-1} + \dots + \binom{k-1}{k-1} j^0 \right) \right) = \\ &= -n \left(1 + \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n-1}{j} j^{k-1} + \binom{k-1}{1} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} j^{k-2} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \binom{k-1}{t} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} j^{k-t-1} + \dots \right) = \\ &= -n \left(1 + S_{n-1,k-1} + \binom{k-1}{1} S_{n-1,k-2} + \binom{k-1}{2} S_{n-1,k-3} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \binom{k-1}{t} S_{n-1,k-1-t} + \dots + S_{n-1,0} \right). \end{aligned}$$

Ha $k < n$, akkor $k-1 < n-1$, $k-2 < n-1$ stb., így a zárójelben az indukciós feltevés szerint az utolsó kivételével mindegyik S nulla, az utolsó -1 , tehát a zárójeles összeg értéke nulla. Ezért $S_{n,k} = 0$, ha $1 \leq k < n$.

Ha $k = n$, akkor csak annyi a különbség, hogy az első S értéke indukciós feltevésünk értelmében $(-1)^{n-1}(n-1)!$, a többi tag az utolsó kivételével most is nulla, az utolsó -1 , így a zárójeles összeg értéke ezúttal $(-1)^{n-1}(n-1)!$, ezért $S_{n,n} = -n(-1)^{n-1}(n-1)! = (-1)^n n!$, amit bizonyítani akartunk.

Révész Gabriella (Komárom, Jókai M. Gimn., IV. o. t.)
dolgozata nyomán

II. bizonyítás. Csak $k \geq 1$ -re bizonyítjuk (1)-et. Tekintsük azt a feladatot, hogy hányféleképpen osztható el k db kártya n darab borítékba úgy, hogy mindegyik borítékba kerüljön kártya (a borítékok és kártyák megkülönböztethetők). k db kártyát n borítékba n^k -féleképpen oszthatunk el, de ebből le kell vonnunk azokat az eseteket, amikor legfeljebb $n-1$ borítékba került csak kártya. Az $n-1$ borítékot $\binom{n}{n-1}$ -féleképpen választhatjuk ki, s minden választásnál $(n-1)^k$ -féleképpen oszthatók el a kártyák, összesen tehát $\binom{n}{n-1}(n-1)^k$ esetet kell levonnunk. Most azonban többször vontuk le azokat az eseteket, amelyekben (legfőljebb) $n-2$ borítékba került kártya, így az előzőhöz hasonló megfontolásból hozzá kell adnunk $\binom{n}{n-2}(n-2)^k$ esetet. A *logikai szita*-formula szerint ezt az eljárást folytatva megkapjuk a jó esetek számát, ami

$$n^k - \binom{n}{n-1}(n-1)^k + \binom{n}{n-2}(n-2)^k - \binom{n}{n-3}(n-3)^k + \dots + (-1)^t \binom{n}{n-t} (n-t)^k + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 0^k.$$

$k \geq 1$, így $0^k = 0$, tehát a keresett szám ($i = n-t$ helyettesítéssel)

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k = (-1)^n \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n}{i} i^k = (-1) S_{n,k}.$$

Ha $k < n$, akkor k kártyát akárhogyan teszünk is n borítékba, marad üres boríték; a fenti szám tehát nulla, s így $S_{n,k} = 0$.

Ha $k = n$ akkor a jó esetek száma az n elemű permutációk száma, $n!$, tehát $(-1)^n S_{n,n} = n!$, ahonnan $S_{n,n} = (-1)^n n!$, amit bizonyítani kellett.

Mohai Zsuzsanna (Dombóvár, Gőgös I. Gimn., IV. o. t.)
dolgozata nyomán

Megjegyzések. 1. A logikai szita-formula és annak bizonyítása megtalálható *Hajós Gy.–Neukomm Gy.–Surányi J.:* Matematikai versenytételek I. rész 124–125. oldalán. Ugyanitt olvasható annak a bizonyítása is, hogy $S_{n,n} = (-1)^n n!$, és a bizonyításból könnyen megkapható a többi (1) alatti állítás is.

2. Mindkét megoldás módszerével igazolhatjuk, hogy $S_{n,n+1} = (-1)^n (n+1)! \frac{n}{2}$, azaz $(n+1)! \frac{n}{2}$ -féleképpen osztható el $n+1$ kártya pontosan n borítékba.

3. Olvasóink bizonyára észrevették, hogy a 2712. feladat az októberi számunkban kitűzött 2704. feladatnak az általánosítása.