

I. megoldás. Ellenőrizhető, hogy $f(3) = 3$; ha tehát $x_0 = 3$, akkor az $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ sorozat minden eleme 3. Ha találunk olyan $a_0, a_1, \dots, a_m, \dots$ végtelen sorozatot, amelynek a kezdő eleme $a_0 = 3$, és $m \geq 1$ -re $f(a_m) = a_{m-1}$, akkor $x = a_m$ választással $x_1 = f(x_0) = f(a_m) = a_{m-1}$, ugyanígy $x_2 = a_{m-2}$, $x_3 = a_{m-3}$, $\dots$, $x_m = a_0 = 3$, s utána már $3 = x_{m+1} = x_{m+2} = \dots$, tehát az $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ sorozatnak csak véges sok (legfeljebb $m+1$) különböző eleme van. Ha még azt is biztosítani tudjuk, hogy minden a_m különböző legyen, akkor találtunk a feladat követelményének megfelelően végtelen sok x_0 értéket. Az $f(a_m) = a_{m-1}$ azt jelenti, hogy a_m az $x^2 - 4x + a_{m-1} = 0$ egyenlet egyik gyöke, tehát $a_m = 2 + \sqrt{4 - a_{m-1}}$, vagy $a_m = 2 - \sqrt{4 - a_{m-1}}$. Az utóbbi esetben $a_m < 2$, tehát a_{m+1} is valós lesz. Tekintsük tehát a következő sorozatot:

$$a_0 = 3, \quad a_m = 2 - \sqrt{4 - a_{m-1}}, \quad \text{ha } m \geq 1 \quad (a_1 = 1, a_2 = 2 - \sqrt{3}, \dots).$$

Ennek a sorozatnak minden eleme valós, mert $m \geq 1$ esetén $a_m < 2$. Másrészt $a_0 > a_1$, és $a_{m-2} > a_{m-1}$ -ből következik, hogy $a_{m-1} = 2 - \sqrt{4 - a_{m-2}} > 2 - \sqrt{4 - a_{m-1}} = a_m$, tehát a sorozat szigorúan monoton csökken. (Felhasználtuk, hogy ahol az $x \mapsto 2 - \sqrt{4 - x}$ függvény értelmes $-x \leq 4$ -re, ott szigorúan monoton nő.) Az $a_0, a_1, \dots, a_m, \dots$ sorozat elemei tehát különbözőek.

Találtunk a feltételeknek eleget tevő sorozatot, ezzel a feladat állítását igazoltuk.

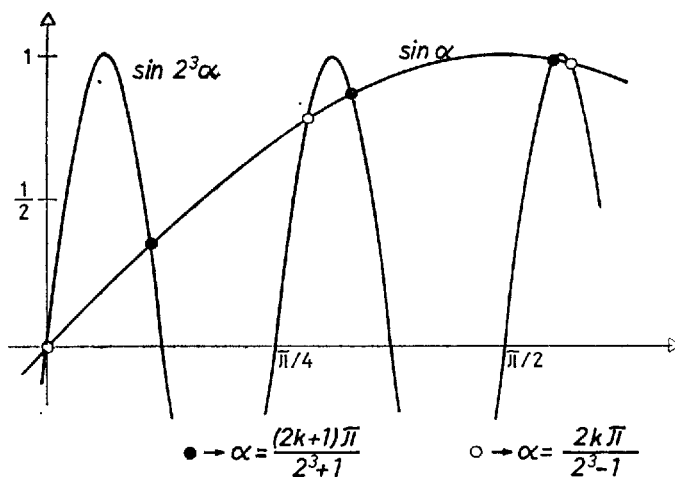
Nagy Gábor Péter (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Vegyük észre, hogy ha x helyébe $4 \sin^2 \alpha$ -t írunk, akkor

$$\begin{aligned} f(x) &= f(4 \sin^2 \alpha) = 16 \sin^2 \alpha - 16 \sin^4 \alpha = 16 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= 4(2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 = 4 \sin^2 2\alpha. \end{aligned}$$

Minden $0 \leq x_0 \leq 4$ -hez van olyan 0 és $\frac{\pi}{2}$ közötti α , amelyre $x_0 = 4 \sin^2 \alpha$, s erre az α -ra

$$x_0 = 4 \sin^2 \alpha, \quad x_1 = 4 \sin^2 2\alpha, \quad x_2 = 4 \sin^2 4\alpha, \dots, x_n = 4 \sin^2 2^n \alpha, \dots$$



$\sin 2^n \alpha$ minden hullámán 2 metszéspont van, mert

$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ -re $\sin \alpha$ monoton és folytonos, $\sin 2^n \alpha$ folytonos, és minden értéket felvesznek 0 és 1 között

A $\sin \alpha$ függvény 0 és $\frac{\pi}{2}$ között szigorúan monoton nő, a $\sin 2^n \alpha$ függvény pedig 0 és $\frac{\pi}{2}$ között 2^{n-2} hullámot ír le (ha α 0 és $\frac{\pi}{2}$ között változik, akkor $2^n \alpha$ 0 és $2^{n-2}(2\pi)$ között mozog, tehát $(2n-2)$ -szer „fordul körbe”), így a $\sin 2^n \alpha$ függvény görbéje 0 és $\frac{\pi}{2}$ között legalább $2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$ -szer metszi a $\sin \alpha$ függvény görbéjét (l. az ábrát).

A $\sin \alpha = \sin 2^n \alpha$ egyenletnek tehát legalább 2^{n-1} megoldása van 0 és $\frac{\pi}{2}$ között, így legalább ennyi megoldása van a $4 \sin^2 \alpha = 4 \sin^2 2^n \alpha$ egyenletnek, tehát az $x_0 = x_n$ egyenletnek is. (Különböző α -hoz különböző $\sin \alpha$, ill. $4 \sin^2 \alpha$ tartozik, hiszen $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.) Minden ilyen x_0 megoldásra

$$x_{n+1} = f(x_n) = f(x_0) = x_1, \quad x_{n+2} = f(x_{n+1}) = f(x_1) = x_2, \dots \text{ stb.,}$$

vagyis az $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ sorozat periodikus, s ezért csak véges sok különböző eleme van.

Minden n -re találtunk tehát legalább 2^{n-1} különböző (megfelelő) x_0 értéket, s miután n növelésével 2^{n-1} minden határon túl nő, a feladat állítását beláttuk.