

Mérjük fel a DA félegyenesre D -ből kiindulva egy olyan szakaszt; amelynek a hossza $DB \cdot DC$; legyen ennek a szakasznak a másik végpontja P . Hasonlóan kapjuk a DQ , ill. DR szakaszokat, amelyek hossza $DA \cdot DC$, ill. $DA \cdot DB$.

Az ABD háromszög hasonló a QPD háromszöghöz, hiszen megegyezik két oldalpárjuk aránya és a közbezárt szög. Ezért

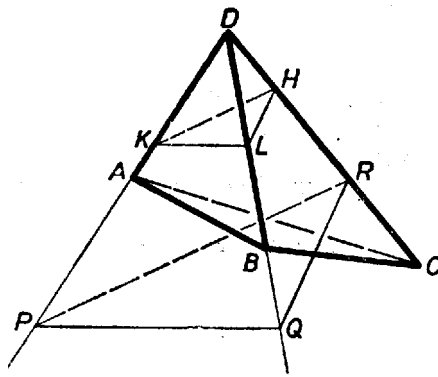
$$\frac{QP}{AB} = \frac{DP}{DB}, \quad \text{azaz} \quad \frac{QP}{AB} = \frac{DB \cdot DC}{DB},$$

így

$$QP = AB \cdot DC.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $RQ = BC \cdot DA$ és $PR = CA \cdot DB$.

Könnyen láthatjuk, hogy a PQR háromszög valóban létezik, hiszen csúcsai rendre a nem egy síkú DA , DB , DC félegyeneseken lévő, D -től különböző pontok. Tudjuk, hogy az ABC háromszög szabályos, vagyis $AB = BC = CA$. Ha az AB szakasz hossza d , akkor a PQR háromszög oldalai $d \cdot DA$, $d \cdot DB$, $d \cdot DC$. A PQR háromszög d -szeres kicsinyítésével tehát olyan háromszöget kapunk, amelynek oldalai éppen DA , BC , DC nagyságúak.



II. megoldás. Vegyünk fel egy olyan gömböt, amely illeszkedik az A , B , C pontokra, és amelynek a D csúcs külső pontja. (Ilyen gömb biztosan létezik.) Legyen a DA , DB és DC élek másik közös pontja a gömbbel K , L és H . Az A , B , D pontok síkja a gömböt egy körben metszi, tehát az $ABLK$ négyszög húrnégyszög. A húrnégyszögek tétele szerint $\angle DKL = \angle ABL$. Emiatt a DAB háromszög hasonló a DLK háromszöghöz, hiszen a D -nél lévő szögük is azonos. Ugyanígy megfontolás alapján a DBC háromszög hasonló DHL -hez, a DCA háromszög pedig DKH -hoz.

Az első két háromszögpár hasonlóságából

$$\frac{KL}{DL} = \frac{BA}{DA} \quad \text{és} \quad \frac{HL}{DL} = \frac{BC}{DC}.$$

E két egyenlet hányadosa:

$$(1) \quad \frac{KL}{HL} = \frac{BA \cdot DC}{DA \cdot BC} = \frac{DC}{DA};$$

(közben felhasználtuk, hogy $BA = BC$.) Ugyanígy kapjuk, hogy

$$(2) \quad \frac{HL}{KH} = \frac{DA}{DB}.$$

(1) és (2) azt jelenti, hogy a biztosan létező KLH háromszög hasonló ahhoz a háromszöghöz, amelynek oldalai DA , DB és DC .