

Az n -re vonatkozó teljes indukcióval belátjuk, hogy a_n minden n természetes számra egész; $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 15$ és $a_4 = 56$ (ez utóbbi érték a feladat szövegében sajtóhibával jelent meg). Megmutatjuk, hogy ha a_n és a_{n-1} egész, akkor a_{n+1} is egész. Ehhez nyilván azt kell igazolnunk, hogy $\sqrt{3a_n^2 + 1}$ egész szám, vagyis $3a_n^2 + 1$ egy egész szám négyzete. Emeljük négyzetre az a_n értékét meghatározó

$$a_n - 2a_{n-1} = \sqrt{3a_{n-1}^2 + 1}$$

összefüggést:

$$a_n^2 - 4a_{n-1}a_n + 4a_{n-1}^2 = 3a_{n-1}^2 + 1.$$

Ha mindkét oldalhoz hozzáadunk $3a_n^2 - 3a_{n-1}^2$ -et, akkor a jobb oldalon éppen $3a_n^2 + 1$, a bal oldalon pedig

$$4a_n^2 - 4a_{n-1}a_n + a_{n-1}^2 = (2a_n - a_{n-1})^2$$

áll, tehát $3a_n^2 + 1$ valóban négyzetszám.

Megjegyzés. A bizonyításból az is kiderült, hogy $a_{n+1} = 2a_n + |2a_n - a_{n-1}|$. Mivel $2a_n = 4a_{n-1} + 2\sqrt{3a_{n-1}^2 + 1} > a_{n-1}$, ezért

$$a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}.$$

Ha α és β a fenti rekurzió ún. „karakterisztikus egyenletének”, az $x^2 = 4x - 1$ egyenletnek a két gyöke, akkor a $b_n = \alpha^n$ és a $c_n = \beta^n$ sorozatok kielégítik a fenti rekurziót, sőt, tetszőlegesen rögzített p és q számok mellett ilyen tulajdonságú lesz az $a'_n = p\alpha^n + q\beta^n$ sorozat is. Valóban, $\alpha^2 = 4\alpha - 1$ és $\beta^2 = 4\beta - 1$ felhasználásával

$$\begin{aligned} a'_{n+1} &= p\alpha^{n+1} + q\beta^{n+1} = p\alpha^{n-1}\alpha^2 + q\beta^{n-1}\beta^2 = \\ &= p\alpha^{n-1}(4\alpha - 1) + q\beta^{n-1}(4\beta - 1) = \\ &= 4(p\alpha^n + q\beta^n) - (p\alpha^{n-1} + q\beta^{n-1}) = 4a'_n - a'_{n-1}. \end{aligned}$$

Ha p és q értékét $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ -nak, ill. $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ -nak választjuk, akkor ($\alpha = 2 + \sqrt{3}$ és $\beta = 2 - \sqrt{3}$ szerint) $a'_0 = 0 = a_0$, $a'_1 = 1 \equiv a_1$. Ez azt jelenti, hogy

$$a_n = a'_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left((2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n \right).$$

A hatványozásokat a binomiális tétel segítségével végezve könnyen látható, hogy a_n egész.