

A feladatban szereplő helyett egy általánosabb összeget számítunk ki; megmutatjuk, hogy $n \geq 3$ esetén

$$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} i^2 (-1)^i = 0.$$

Alakítsuk át az összegzésben álló kifejezést az ismert

$$(1) \quad i \binom{n}{i} = n \binom{n-1}{i-1} \quad (n \geq i \geq 1)$$

összefüggés alapján; ekkor az összeadandókban i „foka” csökken:

$$\begin{aligned} (2) \quad \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} i^2 (-1)^i &= n \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} i (-1)^i = \\ &= n \sum_{i-1=0}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} (i-1+1) (-1)^{i-1+1} = \\ &= -n \sum_{i-1=0}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} (i-1) (-1)^{i-1} - n \sum_{i-1=0}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} (-1)^{i-1}. \end{aligned}$$

Itt az utolsó összeg $(1 + (-1))^{n-1}$ -nek a binomiális tétel szerinti kifejtése, ezért az értéke nulla, ha $n \geq 2$. Az első összegnél vezessük be az $i-1 = k$ jelölést, alkalmazzuk ismét (1)-et $k \geq 1$ -re (a $k = 0$ értékhez tartozó tag nulla, így elhagyható). Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{i-1=0}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} (i-1) (-1)^{i-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} k (-1)^k = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} (-1)^k = \\ &= -(n-1) \sum_{k-1=0}^{n-2} \binom{n-2}{k-1} (-1)^{k-1} = -(n-1) (1 + (-1))^{n-2} = 0, \end{aligned}$$

ha $n \geq 3$. Ezzel beláttuk, hogy $n \geq 3$ esetén a (2)-ben kapott mindkét összeg nulla, tehát a feladatban szereplő összeg értéke is nulla.

Megjegyzés: Hasonlóan igazolható, hogy

$$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} i^k (-1)^i = 0,$$

ha $n \geq k+1$.