

Jelöljük egy ilyen gömb középpontját  $O$ -val. Ha speciálisan  $A$  egybeesik  $B$ -vel, akkor minden  $O$  gömbközepppont egyenlő távolságra van  $A$ -tól és  $S$ -től. Az ilyen tulajdonságú pontok halmaza olyan forgási paraboloidfelület, amelynek tengelye merőleges az  $S$  síkra. Ezt a paraboloidot úgy is megkaphatjuk, hogy egy  $A$ -n átmenő,  $S$ -re merőleges síkban – melynek  $S$ -sel való metszete  $m$  – megkeressük az  $A$ -tól és  $m$ -től egyenlő távolságra lévő pontok mértani helyét. Ez egy parabola, amelynek tengelye körüli megforgatásával nyerhetjük az előbb említett paraboloidot. A paraboloidfelület minden pontja nyilván egy olyan gömb középpontja lehet, amely átmegy  $A$ -n és érinti az  $S$  síkot.

1988-12-446-1.eps

Ha az  $AB$  szakasz párhuzamos  $S$ -sel, akkor a fenti gondolatmenet mind  $A$ -ra, mind  $B$ -re elmondható, s a gömbközepppontok mértani helye a két egybevágó forgási paraboloidfelület metszete lesz, ami parabola.

Ezt a tényt egyszerűbben is beláthatjuk. A két paraboloid nyilván szimmetrikus az  $AB$  szakasz felező merőleges síkjára. A keresett gömbközepppontok ebben a síkban vannak, a mértani hely tehát akármelyik előbbi paraboloidfelület és a felező merőleges sík metszete, vagyis parabola. Nyilván a parabola minden pontja megfelel.

Tegyük fel ezután, hogy  $AB$  egyenes nem párhuzamos  $S$ -sel, jelöljük a közös pontjukat  $C$ -vel. Legyen  $O$  egy megfelelő gömb középpontja, ennek  $S$ -re való vetülete  $D$ . Az  $S$  sík  $D$ -ben érinti a gömböt, ezért a  $C$  pontnak az  $A$  és  $B$  pontokon átmenő,  $O$  középpontú körre vonatkozó hatványa:

$$CD^2 = CA \cdot CB.$$

Ez azt jelenti, hogy  $CD$  állandó, tehát a  $D$  érintési pontok mértani helye egy  $r = \sqrt{CA \cdot CB}$  sugarú kör. Ennek a körnek minden pontjához tartozik egy olyan  $O$  középpontú gömb, amely átmegy  $A$ -n és  $B$ -n. A gömb középpontja egyfelől rajta van a  $D$  pontokban  $S$ -re állított merőleges egyenesek valamelyikén, tehát egy  $C$  körül  $r$  sugárral rajzolt kör alapú henger felületén, másfelől rajta van az  $AB$  szakasz felező merőleges síkján. Ezért a keresett mértani hely ebben az esetben egy hengerfelület és egy sík metszete, tehát ellipszis. (Speciálisan, a síkmetszet kör lesz, ha  $AB$  merőleges  $S$ -re.) Világos, hogy az ellipszis minden pontja megfelelő gömbközepppont.