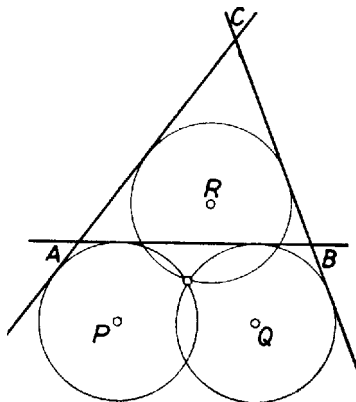


Tekintsük a feladatot megoldottnak. Jelölje a háromszög csúcsait A, B, C , a körök középpontját P, Q, R . Nézzük a háromszög egyik oldalát. Az oldalt érintő két (különböző) kör érinti a háromszög további 1-1 oldalát is, így a két kör középpontja az oldal egyenesének ugyanabban a felsíkjában van, mint ABC . Mivel a körök sugara egyenlő, a középpontjukat összekötő egyenes párhuzamos a kiszemelt oldallal. Ez mindegyik oldalra igaz, ezért a PQR háromszög hasonló az ABC háromszöghöz. A három kör közös pontja a P, Q, R pontoktól egyenlő távolságra van, ezért ez a pont a PQR háromszög köré írt körének a középpontja.

Ezután a feladatot úgy oldhatjuk meg, hogy szerkesztünk egy hasonló ábrát, és azt alkalmasan kicsinyítjük. Ezt a következőképpen tehetjük meg. Az ABC háromszög mindegyik csúcsa köré a háromszög köré írt kör középpontján is átmenő (és így egyenlő sugarú) köröket rajzolunk. Sorra mindegyik körpárnak húzzuk meg azt a közös érintőjét, amelyik nem metszi a harmadik kört. A három érintő olyan háromszöget határoz meg, amelyik hasonló az ABC háromszöghöz, és a három kör e háromszög oldalait a feladat követelményei szerint érinti. Tekintsük végül azt a hasonlósági transzformációt, amely ezt a háromszöget az ABC háromszögbe viszi át. Ez a transzformáció a három kört olyan körökbe képezi le, amilyeneket szerkeszteni kell.

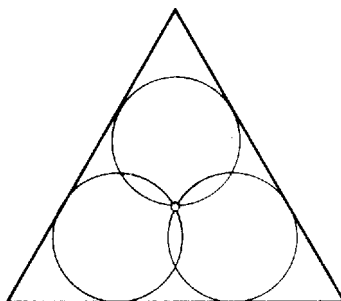
Megjegyzések: 1. Mivel az említett két háromszög „párhuzamosan” hasonló, középpontosan is hasonló, így könnyű látni, hogy a hasonlóság centruma a belső szögfelezők metszéspontja. A megoldásban azért kellett két kör közös érintői közül a harmadik kört nem metszőt választani, mert az „oldal” szót „szakasz” értelemben használjuk, és a hat érintési pont így biztosan az oldalak egy-egy pontja lesz. Azt is látjuk, hogy a feladatnak mindig van megoldása.



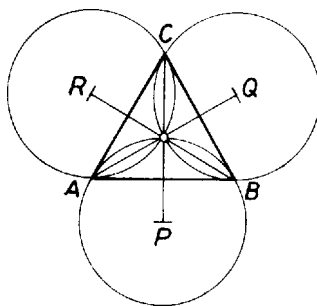
1. ábra

2. Ha a feladat szövegében „oldal” helyett „oldalegyenes” szerepel, a hasonló ábra készítésénél bármelyik két kör mindkét közös érintője számításba jön, és így az érintők 2–3 különböző hasonló háromszöget határoznak meg. E 8 megoldás egyikét vázoltuk az 1. ábrán. Itt a P és Q középpontú kör nem az AC , illetve BC oldalt, hanem azok meghosszabbítását érinti. Ez esetben a hasonlóság centruma a C csúcsához tartozó belső, és a másik két csúcsához tartozó külső szögfelező közös pontja. Ha ABC derékszögű háromszög, akkor az előbbi 8 megoldáson kívül még úgy is szerkeszthetők a körök, hogy azok közül kettő érintkező legyen. E négy megoldás egyikét az 5. ábra mutatja.

3. Eredeti feladatunkhoz visszatérve felvetődik a kérdés, hogy a 2. pontban említett (általánosabb értelemben vett) megoldások között van-e még olyan, amelyiknél valamennyi érintési pont az oldalakra (vagy pedig azok meghosszabbítására) esik. A 2. és a 3. ábra mindenesetre azt mutatja, hogy ha az ABC háromszög szabályos, akkor legalább két megoldás lehetséges. A 3. ábrán vázolt esetben a hasonló ábra szerkesztésekor bármelyik két kör közös érintőjét úgy választhatjuk, hogy az messe a harmadik kört.

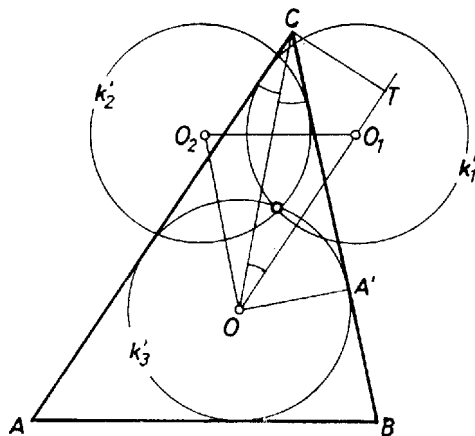


2. ábra

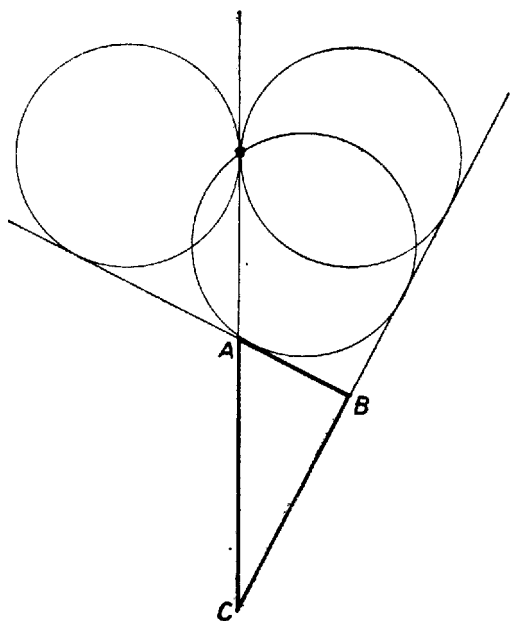


3. ábra

Megmutatjuk, hogy ha az ABC háromszög nem szabályos, akkor a feladatnak pontosan egy megoldása van, szabályos háromszög esetén pedig csak a fenti két megoldás létezik. Ehhez a 2. pontban szereplő eseteket egyenként meg kell vizsgálni. Állításunk könnyen belátható minden olyan esetben, amikor a háromszög megszerkesztéséhez felhasznált közös érintők valamelyike nem metszi az öt nem érintő harmadik kört; a részleteket az Olvasóra hagyjuk.



4. ábra



5. ábra

Tegyük fel viszont, hogy az ABC háromszöghöz található három, egy ponton átmenő, egyenlő sugarú k_1, k_2 , ill. k_3 kör úgy, hogy ezek rendre érintik az AC és AB, BC és AB , ill. AC és BC oldalakat, továbbá metszik a BC, AC , ill. AB oldalt. Feltehetjük, hogy például $BC \leq AC \leq AB$. Kicsinyítsük a k_i köröket C -ből úgy, hogy a kapott k'_1, k'_2, k'_3 körök közül k'_3 éppen az ABC háromszögbe írt kör legyen (4. ábra). Jelölje k'_1, k'_2 , és k'_3 középpontjait O_1, O_2 és O ;

C -ből az OO_1 egyenesre állított merőleges talppontja legyen T , végül jelöljük A' -vel azt a pontot, amelyben k'_3 a BC oldalt érinti. Mivel k'_1 érinti az AC oldalt, ezért

$$(1) \quad OO_1 \leq OT.$$

Mint azt már korábban láttuk, az O_1O_2O háromszög hasonló ABC -hez, a hasonlóság aránya pedig $\frac{r}{R}$, ahol r az ABC háromszögbe, R pedig a háromszög köré írható körnek a sugara. Így (a háromszög oldalait és szögeit a szokásos módon jelölve)

$$(2) \quad OO_1 = \frac{r}{R}b.$$

Az OTC és az $OA'C$ derékszögű háromszögek egybevágók, hiszen közös OC átfogójukon kívül egyik hegyesszögük $\frac{\gamma}{2}$, ezért

$$(3) \quad OT = CA' = \frac{1}{2}(a + b - c),$$

(1), (2) és (3) alapján

$$\frac{r}{R}b \leq \frac{1}{2}(a + b - c),$$

azaz (a háromszög területét t -vel jelölve)

$$\begin{aligned} \frac{a + b - c}{b} &\geq \frac{2r}{R} = \frac{4t}{a + b + c} \cdot \frac{4t}{abc}, \\ a + b - c &\geq \frac{16t^2}{ac(a + b + c)} = \frac{(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{ac}, \end{aligned}$$

így

$$ac \geq (a + (c - b)) \cdot (c + (b - a)).$$

Mivel feltevésünk szerint $c \geq b \geq a$, ezért a fenti egyenlőtlenségből $c - b = 0 = b - a$ következik; az ABC háromszög tehát szabályos.