

I. megoldás. Legyen az öt szám a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Tekintsük az összes olyan a_i, a_j párt, amelyek $a_i + a_j$ összege racionális. Valamennyi ilyen racionális összeget tört alakba írva, legyen ezek egyik közös nevezője N . (Ha egyáltalán nincs racionális összeg, akkor legyen $N = 1$.) Az Na_i számok közül bármelyik kettő összege vagy irracionális, vagy pedig egész. Mivel mindegyik Na_i irracionális, ezért Na_i tört része nem 0 és nem $1/2$; osszuk két csoportba ezeket a számokat aszerint, hogy törtrészüik $1/2$ -nél kisebb, ill. nagyobb. Valamelyik csoportba legalább három szám esik, és ezek közül semelyik kettő összege sem egész, következésképpen közülük bármelyik kettő összege irracionális.

Megjegyzés. A fenti megoldással általánosabban az is belátható, hogy m darab irracionális szám között mindig van legalább $\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$ olyan, amelyek közül akármelyik két szám összege irracionális. Az $\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$ korlát általában nem növelhető; legyen ui. $m = 2n$, a pedig tetszőleges irracionális szám; ekkor $a, -a, 2a, 2a, 3a, -3a, \dots, na, -na$ irracionálisak, és közülük $\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor = n$ -nél többet kiválasztva, valamelyik összeg biztosan nulla.

II. megoldás. Tekintsük azt a gráfot, amelynek csúcsai az $a_1, a_2, \dots, a_m$ irracionális számok, és a_i akkor van a_j -vel összekötve, ha $a_i + a_j$ racionális. Megmutatjuk, hogy így páros gráfhoz jutunk, azaz a gráf csúcsai két osztályba sorolhatók úgy, hogy azonos osztályba lévő csúcsok ne legyenek összekötve. Mivel az egyik osztályba legalább $\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$ darab csúcs esik, ezért (általánosított) feladatunk állítása már nyilvánvalóan következni fog. Az F. 2670. feladat megoldásához fűzött megjegyzésben (lásd 1988/7. számunk 303. oldalán) utaltunk arra a megoldásban igazolt tényre, hogy egy gráf páros, ha nincs benne páratlan sok csúcsot tartalmazó kör. Tegyük fel tehát, hogy ilyen kör mégis létezik a gráfban, azaz pl. $a_1, a_2, \dots, a_{2k+1}$ ebben a sorrendben kört alkot. Ez azt jelenti, hogy $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{2k} + a_{2k+1}, a_{2k+1} + a_1$ valamennyien racionális számok; ekkor azonban

$$a_1 = \frac{1}{2} \left((a_1 + a_2) - (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) - + \dots - (a_{2k} + a_{2k+1}) + (a_{2k+1} + a_1) \right)$$

is racionális, ami ellentmondás.