

Tegyük fel, hogy az oszlopok magasságát meg tudtuk választani a kívánt módon. Legyenek ezek a magasságok a, b, c, d, e, f, g .

1988-12-444-1.eps

Az ábrán az A és C másodsomszéd hétszög-csúcsok, e csúcsokba állított oszlopok magassága a , illetve c , az oszlopok tetejét összekötő huzal végpontjai A_1 , illetve C_1 . Az X és Y pontok a huzalt keresztező másik két huzal A_1C_1 -re eső vetületei. Legyen β/α az az arány, ahogyan X az A_1C_1 szakaszt osztja. Ekkor Y ugyanezt a szakaszt α/β arányban osztja, hiszen a hétszög szabályos. Nyilván α és β megválasztható úgy, hogy $\alpha + \beta = 1$ legyen. Ekkor az ábrán x -szel jelölt szakasz hossza:

$$x = \alpha \cdot a + \beta \cdot c.$$

Tegyük fel, hogy ennél a kereszteződésnél x az egymás „feletti” pontok közül az alacsonyabban levőnek a magassága a hétszög síkja felett. A feladat szövegében az alul-felül keresztezésekre tett feltétel miatt, egyetlen keresztezés milyensége meghatározza a többit. Ezért x -hez hasonlóan kiszámítva a keresztezések alacsonyabban fekvő pontjainak a hétszög síkja feletti magasságát és ezeket összegezve a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} &(\alpha a + \beta c) + (\alpha c + \beta e) + (\alpha e + \beta g) + (\alpha g + \beta b) + (\alpha b + \beta d) + (\alpha d + \beta f) + \\ &+ (\alpha f + \beta a) = (\alpha + \beta)(a + b + c + d + e + f + g) = a + b + c + d + e + f + g. \end{aligned}$$

Hasonlóan meghatározhatjuk az egy-egy kereszteződésben egymás „feletti” pontok közül a magasabban fekvőknek a hétszög síkja feletti magassága összegét. Egy ilyen magasság pl. $y = \beta a + \alpha c$.

Ezeknek a magasságoknak az összege:

$$\begin{aligned} &(\beta a + \alpha c) + (\beta c + \alpha e) + (\beta e + \alpha g) + (\beta g + \alpha b) + (\beta b + \alpha d) + (\beta d + \alpha f) + \\ &+ (\beta f + \alpha a) = (\alpha + \beta)(a + b + c + d + e + f + g) = \\ &= a + b + c + d + e + f + g. \end{aligned}$$

Ha a feladat megoldható lenne, a második esetben nagyobb összeget kaptunk volna. A két összeg egyenlősége ellentmondás, tehát az oszlopok magassága a kívánt módon nem választható meg.

Megjegyzés. A megoldásban fölhasználtuk, hogy a hétszög szabályos. Megmutatható azonban, hogy a megfelelő állítás bármilyen konvex hétszögre, sőt bármilyen háromnál nagyobb páratlan oldalszámú konvex sokszögre is érvényes. (A konvexitásra azért van szükség, hogy egyáltalán létrejöjjenek a keresztezések.)