

I. megoldás. Legyen $a_1 = a + x$, $a_2 = a + y$, $a_3 = a + z$, ahol $x, y, z \geq 0$. Mivel $1 = a_1 + a_2 + a_3 = 3a + (x + y + z)$, ezért

$$(1) \quad x + y + z = 1 - 3a.$$

Azt kell igazolnunk, hogy

$$(a + x)^2 + (a + y)^2 + (a + z)^2 \leq 6a^2 - 4a + 1,$$

azaz

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2a(x + y + z) + 3a^2 \leq 6a^2 - 4a + 1.$$

Ebbe (1)-et beírva majd rendezve, az

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 9a^2 - 6a + 1$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Mivel a jobb oldalon $(1 - 3a)^2 = (x + y + z)^2$ áll, így mindössze azt kell bizonyítanunk, hogy

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq (x + y + z)^2.$$

Mivel a jobb és a bal oldal különbsége: $2(xy + xz + yz) \geq 0$, hiszen $x, y, z \geq 0$, az egyenlőtlenség valóban fennáll.

Istenes Péter (Budapest, Árpád Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Tekintsük az $y = x^2$ egyenletű parabola $P_1(a_1, a_1^2)$, $P_2(a_2, a_2^2)$, $P_3(a_3, a_3^2)$ pontjaiból alkotott háromszög S súlypontját. Ennek koordinátái: $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{1}{3}$ és $\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3}$. Mivel az a_i számok mindegyike legalább a , ezért $a_i = 1 - a_j - a_k \leq 1 - 2a$. Jelölje Q és R a parabola azon pontjait, melyeknek koordinátái a és a^2 , illetve $1 - 2a$ és $(1 - 2a)^2$. Az $y = x^2$ függvény konvex, ezért a teljes $P_1P_2P_3$ háromszög a QR szakasz alatt helyezkedik el. Speciálisan S ordinátája is legfeljebb akkora, mint a QR szakasz $\frac{1}{3}$ abszcisszájú pontjéé. Mivel ez a pont QR -nek a Q -hoz közelebbi harmadolópontja, ezért azt kapjuk, hogy

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3} \leq \frac{2a^2 + (1 - 2a)^2}{3},$$

amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzések. 1. Mindkét bizonyításból könnyen adódik, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenségben az egyenlőség feltétele pontosan az, hogy a_1, a_2, a_3 közül kettő a -val, egy pedig $(1 - 2a)$ -val egyezzen meg.

2. A második megoldás alapján megfogalmazhatjuk a feladat következő általánosítását: ha f konvex függvény, továbbá $a_1, a_2, a_3 \geq a$ és $a_1 + a_2 + a_3 = A$, akkor $f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) \leq 2f(a) + f(A - 2a)$. Ugyanezzel a gondolatmenettel bizonyítható be a megfelelő állítás 3 helyett n valós számra is:

Ha $a_1, \dots, a_n \geq a$, $\sum_{i=1}^n a_i = A$, és az f függvény konvex, akkor $f(a_1) + \dots + f(a_n) \leq (n-1)f(a) + f(A - (n-1)a)$.