

I. megoldás. Könnyen észrevehető, hogy ha $a + b + c = 0$, akkor minden, az $x = y = z$ kikötésnek eleget tevő számhármassal megoldás.

Az is világos, hogy ha $a = b = c$, akkor minden olyan számhármassal megoldás, amelyre $x + y + z = 0$.

A továbbiakban feltesszük, hogy $a + b + c \neq 0$, és a, b, c közül legalább kettő különböző, végül feltesszük, hogy az egyenletrendszernek létezik egy olyan x_1, y_1, z_1 megoldása, ahol $z_1 \neq 0$.

Bevezetve az

$$x' = \frac{x_1}{z_1}, \quad y' = \frac{y_1}{z_1}$$

számokat, ezekre:

$$ax' + by' = -c, \quad bx' + cy' = -a \quad \text{és} \quad cx' + ay' = -b.$$

A három egyenletet összeadva, majd $a + b + c \neq 0$ -val osztva az $x' + y' = -1$ egyenlethez jutunk. Az $y' = -1 - x'$ összefüggést az újabb három egyenletünkbe helyettesítve:

$$(a - b)x' = b - c, \quad (b - c)x' = c - a \quad \text{és} \quad (c - a)x' = a - b.$$

Látható, hogy a, b, c közül semelyik kettő sem lehet egyenlő, ui. ha pl. $a = b$, akkor az első egyenletből $b = c$, tehát $a = b = c$, amit kizártunk. Ha összeszorozzuk e három egyenletet, az

$$(a - b)(b - c)(c - a)(x'^3 - 1) = 0$$

egyenlethez jutunk. Itt $(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0$, tehát $x'^3 = 1$, amiből $x' = 1$, így $a - b = b - c = c - a$. E három – egymással egyenlő – szám összege nulla, egyenlők tehát csak úgy lehetnek, ha mindegyikük nulla, amit viszont kizártunk. Feltevésünkkel ellentmondásra jutottunk. A feladatban szereplő egyenletrendszernek ezért az $x = y = z = 0$ esettől különböző megoldása két esetben van: ha $a + b + c = 0$ vagy ha $a = b = c$.

II. megoldás. Ismeretes, hogy egy homogén lineáris egyenletrendszernek – amilyen a feladatban is szerepel – pontosan akkor van nem triviális (nem csupa nulla) megoldása, ha determinánsa nulla. A mi esetünkben ez a determináns:

$$0 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3 = -\frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$$

Innen két esetet kapunk: Vagy $a + b + c = 0$ (amikor minden $x = y = z$ számhármassal megoldás), vagy $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$, azaz $a = b = c$ (amikor minden olyan számhármassal megoldás, amelyre $x + y + z = 0$). Minden más esetben csak a triviális megoldás létezik.