

A feltétel a szabályos tetraéderre is érvényes, ekkor a következmény semmitmondó. Ezért azt is feltesszük, hogy a tetraédernek nem minden éle egyenlő. Használjuk az 1. ábra jelöléseit.

1988-10-308-1.eps

1. ábra

Legyen K az a pont, amelyben a beírt gömb az ABC lapot érinti. K -nak pl. A -tól való távolsága $KA = \sqrt{R^2 - r^2}$, ahol R a tetraéder köré írt, r pedig a beírt gömb sugara. Ugyanakkora a KB és KC szakasz is, tehát K az ABC háromszög köré írt kör középpontja, és e kör sugara $\sqrt{R^2 - r^2}$. Hasonlóan mutatjuk meg, hogy ugyanennyi a tetraéder többi lapja köré írt kör sugara is. Ezért pl. $\angle ACB = \angle ADB$, hiszen ugyanakkora sugarú körökben azonos húrhoz tartozó kerületi szögek. (Mivel K az ABC háromszög belső pontja, ABC – s így a tetraéder valamennyi lapja – hegyesszögű.) Az $\angle ACB = \angle ADB$ szöget γ -val jelöltük; hasonló okból egyenlők az ábrán azonos betűkkel jelölt szögek.

Az ABC és BCD háromszögek szögeinek összegére

$$\varepsilon + \delta + \gamma = \varepsilon + \alpha + \varphi,$$

így

$$(1) \quad \delta + \gamma = \alpha + \varphi.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$(2) \quad \delta + \varphi = \alpha + \gamma.$$

(1)-ből és (2)-ből $\gamma = \varphi$ adódik, és ugyanígy $\alpha = \delta$ és $\beta = \varepsilon$. Ezekből következik, hogy a tetraéder lapjai egybevágók, a szemközt fekvő, (kitérő) élek egyenlők.

Jelölje F a BC él felezőpontját. Az ABC és DCB háromszögek egybevágósága miatt $AF = DF$, így az ADF egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjait a velük szemben fekvő szár F -hez közelebbi harmadolópontjával összekötő AA_1 és DD_1 szakaszok – a tetraéder A -ból, ill. D -ből induló súlyvonalai – egyenlők (2. ábra).

1988-10-309-1.eps

2. ábra

A lapok egybevágók lévén, tetraéderünk valamennyi súlyvonala egyenlő hosszúságú. A súlypont minden súlyvonalat a csúctól számítva $3 : 1$ arányban oszt, így minden csúctól egyenlő távolságra van. A súlypont tehát egybeesik a körülírt gömb középpontjával. A D csúcsból induló súlyvonal másik végpontja az ABC lap S súlypontja. O -nak, a gömb középpontjának az ABC lap síkjára eső merőleges vetülete – amint azt korábban megállapítottuk – éppen az ABC háromszög köré írt kör K középpontja. KS meghatározza az ABC háromszög Euler-egyenését, ami egyértelműen meg van határozva, mert a lapok nem szabályos háromszögek, ezért a DS súlyvonal merőleges vetülete az ABC lap Euler-egyenese. Ezen rajta van az ABC háromszög M magasságpontja és a D csúcs V vetülete is. Az Euler-egyenesen

$$(3) \quad KM = 3 \cdot KS.$$

A párhuzamos szelők tétele szerint

$$VK : KS = DO : OS = 3 : 1,$$

így

$$(4) \quad VK = 3KS.$$

(3) és (4) alapján tehát $VK = KM$, következésképpen $OV = OM$. Az OM átfogójú OKM derékszögű háromszög OK befogójának hossza a tetraéderbe írt gömb sugara, a másik befogó pedig az ABC háromszög köré írt kör középpontjának és a háromszög magasságpontjának a távolsága. A tetraéder lapjainak egybevágósága miatt tehát az $OV = OM$ távolság nem függ az ABC lap megválasztásától.

1988-10-309-2.eps

3. ábra