

I. megoldás. Legyen a két kör középpontja O_1 , illetve O_2 , az érintkezési pontjuk pedig M . Az E -ben és F -ben állított merőlegesek metszéspontja G (1. ábra).

1988-10-305-1.eps

1. ábra

Az EO_1M és MO_2F egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögei α , illetve β . Ezért ezeknek a háromszögeknek O_1 , illetve O_2 -nél lévő külső szögei 2α , illetve 2β . Így az O_1GO_2 derékszögű háromszögből $2\alpha + 2\beta = 90^\circ$, azaz $\alpha + \beta = 45^\circ$. Ebből következik, hogy $\angle EMF = 135^\circ$, vagyis az 1. ábrán megrajzolt helyzetben M rajta van az EF szakasz fölötti 135° -os látókörvén. Feladatunknak azonban olyan megoldásai is lehetnek (lásd 2. ábra), amelyekben az O_1 vagy az O_2 középpontú kör az e , illetve f egyenes másik félsíkjaiban van.

1988-10-306-1.eps

2.a ábra

1988-10-306-2.eps

2.b ábra

1988-10-306-3.eps

2.c ábra

1988-10-306-4.eps

2.d ábra

Ezekben az esetekben az EF szakasz másik 135° szögű látókörvén, vagy az EF 45° szögű látókörvén találjuk az M pontot. A 2.c) ábrán vázolt esetben az EF „alatti” 45° szögű látókörvén lesz az M pont (sőt azt is láthatjuk, hogy ennek a látókörvének a „harmadik síknegyedbe” eső részén). A 3. ábrán megrajzoltuk az EF húrra illeszkedő látóköríveket, és megvastagítottuk azokat az íveket, amelyeken az M elhelyezkedhet.

1988-10-306-5.eps

3. ábra

Legyen EF felezőpontja P . Mivel az M érintési pont a két kör hasonlósági pontja, és a hasonlóság aránya $1 : 1$, M felezi az F_1F szakaszt, ezért MP az EF_1F háromszög középvonala. Világos, hogy EF_1 45° -os szöget zár be OE -vel, tehát MP is. Az M pont így megszerkeszthető, mert rajta van a fentebb említett valamelyik látókörvén és az EF felezőpontján átmenő, OE -vel 45° -os szöget bezáró egyenesen. Mivel ilyen egyenes kettő van, a 3. ábrán vastagon kihúzott ívekkel négy metszéspont lehetséges. M ismeretében a körök egyszerűen szerkeszthetők.

Megjegyzés. A 3. ábra tulajdonképpen az e , illetve f egyenest E , illetve F -ben érintő és egymást is érintő (tetszőleges sugarú) körök érintkezési pontjainak mértani helyét adja meg. A megvastagított ívek a kívülről érintkező, a többi ív a belülről érintkező körpárok érintési pontjainak mértani helye.

1988-10-307-1.eps

4. ábra

II. megoldás. Használjuk a 4. ábra jelöléseit. Feladatunk az EO_1O_2F töröttvonal megszerkesztése, ahol tudjuk, hogy $EO_1 = O_2F = r$, és ismerjük e két szakasz irányát, továbbá azt is, hogy $O_1O_2 = 2r$. Legyen az O_1 -ből O_2F -fel párhuzamosan húzott sugár másik végpontja F' .

Az $EO_1F'F$ töröttvonal könnyen megszerkeszthető, mert első két szakaszának nagyságát és irányát ismerve, tudunk hozzá hasonlólt szerkeszteni. Mérjük fel EO_1 -re E -ből tetszőleges szakaszt, legyen ennek másik végpontja O_1^* . O_1^* -ban EO_1^* -re állított merőlegesre mérjük rá az EO_1^* szakaszt, így kapjuk az F^* pontot. F^* -ból $F'F$ -fel húzott párhuzamos az N pontban metszi az EF szakaszt. Az $EO_1^*F^* \sim EO_1F'$ és $EF^*N \sim EF'F$ hasonlóságokból következik, hogy F^*N kétszerese az EO_1^* szakasznak, hiszen $F'F$ is kétszerese EO_1 -nek. Ezért N megszerkeszthető, mint az F^* köré rajzolt $2 \cdot EO_1^*$ sugarú kör és EF metszéspontja.

Az $EO_1^*F^*N$ töröttvonal középpontosan hasonló az $EO_1F'F$ töröttvonalhoz, és a hasonlóság középpontja E . Ezért a rajzot úgy nagyítjuk, hogy N az F pontban menjen át, és közben kapjuk az F' és az O_1 pontokat. A feladatnak négy megoldása lesz, mert az F^* középpontú $2 \cdot EO_1^*$ sugarú kör két pontban metszi az EF egyenest, továbbá O_1^* az e egyenes másik partján is lehet, mint O_1 .

Megjegyzés. Ez a megoldás akkor is működik, ha az e és f félegyenesek nem merőlegesek. Hasonlóan az I. megoldás is használható, $2\alpha + 2\beta$ helyére $180^\circ - FGE$ lép.

III. megoldás. $OE = a$ és $OF = b$ jelöléssel a 4. ábra alapján $(a - r)^2 + (b - r)^2 = 4r^2$. Ez $|r|$ -re másodfokú egyenlet, amelynek gyöke – mint tudjuk – megszerkeszthető, és ezután megszerkeszthetők a körök is. A másik két gyök abszolút értéke adódik pl. a következő egyenletből: $(a + r)^2 + (b - r)^2 = 4r^2$.