

Megmutatjuk, hogy a feladat kérdésére a válasz nemleges. Ehhez elegendő síkidomoknak egy olyan rendszerét megadni, amely végtelen sok síkidomból áll, és közülük egyik sem fedhető le a többivel. Téglalapokat adunk meg ebből a célból; legyenek ezek $T_1, T_2, T_3, \dots$. Az n -edik téglalap, T_n oldalainak hosszúsága legyen 8^n és $\frac{1}{8^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Belátjuk, hogy ekkor egyik téglalap sem fedhető le a többivel. Ez abból következik majd, hogy e téglalapokat akárhogyan helyezzük is el, T_n -ből a többiek által lefedett részek területének összege mindig kisebb T_n területénél, azaz 1-nél (minden n -re).

Legyen $n > k$; vizsgáljuk meg, hogy a téglalapok tetszőleges elhelyezése mellett legfeljebb mekkora lehet T_n és T_k közös részének a területe. Ha a közös rész nem üres, foglaljuk bele egy olyan téglalapba, amelynek két szemközti oldala T_n két hosszabbik oldalán van, másik két oldala pedig párhuzamos T_n rövidebbik oldalával; a legkisebb ilyen téglalap utóbbi oldalai nyilván tartalmazznak T_k -hoz tartozó pontokat – ezek közül egyet-egyet jelöljünk P -vel, ill. Q -val (l. az ábrán).

1988-12-441-1.eps

Becsüljük meg, hogy legfeljebb mekkora lehet ennek a köréírt téglalapnak a területe! A téglalap egyik oldala $\frac{1}{8^n}$ hosszúságú, másik oldala pedig legfeljebb PQ . Mivel P és Q a T_k téglalap pontjai, ezért távolságuk legfeljebb akkora lehet, mint T_k átmérője, az pedig kisebb a hosszabbik oldal 2-szeresénél, $2 \cdot 8^k$ -nál. Téglalapunk területe ezért kisebb, mint

$$\frac{1}{8^n} \cdot 2 \cdot 8^k = \frac{2}{2^{n-k}} \cdot \frac{1}{4^{n-k}},$$

ez pedig legfeljebb $\frac{1}{4^{n-k}}$; így T_n és T_k közös részének a területe is kisebb $\frac{1}{4^{n-k}}$ -nál.

Próbáljuk meg ezután T_n -et a $T_1, T_2, \dots, T_{n+1}, T_{n+2}, \dots$ téglalapokkal lefedni. Az előbbieket szerint az általuk T_n -ből lefedett részek területe rendre kisebb, mint

$$\frac{1}{4^{n-1}}, \frac{1}{4^{n-2}}, \dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \dots$$

A téglalapok által együttesen lefedett rész területe legfeljebb az egyenként lefedett részek területének az összege lehet, ami tehát

$$L = \left(\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-2}} + \dots + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots \right) -$$

nél kisebb. A második zárójelben egy végtelen mértani sor összege, az elsőben pedig ennek egy részösszege áll, így

$$L < 2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots \right) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3} < 1.$$

Mivel T_n területe 1, ezért T_n -et nem lehet lefedni a $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}, T_{n+1}, T_{n+2}, \dots$ téglalapokkal.

Fleiner Tamás (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzés A megoldásban szereplő – olykor elég durva – becslések az egyszerű számolást segítették elő. Ezzel kapcsolatban megemlíti, hogy ha a téglalapok oldalait például 4^n és $\frac{1}{4^n}$ hosszúságúnak választjuk, akkor ugyanezek a növelések már nem vezetnek a kívánt eredményre.