

A szóban forgó számok közül nevezzük a -t és b -t *egymás ismerőseinek*, ha található számaik között olyan

$$a = c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n = b,$$

hogy

$$|c_0 - c_1| = 3^{k_1}, |c_1 - c_2| = 3^{k_2}, \dots, |c_{n-1} - c_n| = 3^{k_n},$$

ahol $k_1, k_2, \dots, k_n$ egész számok. A $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$ számok között lehetnek egyenlők is. Az ismerős a, b számokat (egymáshoz) barátságosnak, ill. *ellenségesnek* fogjuk hívni aszerint, hogy a fenti n páros vagy pedig páratlan. (Speciálisan, ha $|a - b| = 3^k$ alakú, akkor a és b ellenséges.) Igen könnyen látható, hogy ekkor érvényesek a következő szabályok:

- (1) Ha a és b ismerősök, és b és c is ismerősök, akkor a és c ugyancsak ismerősök.
- (2) Ha a és b barátságos, továbbá a és c is barátságos, akkor b és c is barátságos.
- (3) Ha a és b ellenséges, valamint a és c is ellenséges, akkor b és c barátságos.

Korántsem ennyire nyilvánvaló az alábbi állítás:

- (4) Ha a és b barátságos, akkor nem lehet ellenséges.

Tételezzük fel ugyanis, hogy a és b barátságos és ugyanakkor ellenséges is. Ez azt jelenti, hogy a megadott számok közül kiválasztható $c_1, c_2, \dots, c_{2m-1}$ és $d_1, d_2, \dots, d_{2t}$ úgy, hogy

$$|a - c_1| = 3^{k_1}, |c_1 - c_2| = 3^{k_2}, \dots, |c_{2m-1} - b| = 3^{k_{2m}}, \\ |a - d_1| = 3^{l_1}, |d_1 - d_2| = 3^{l_2}, \dots, |d_{2t} - b| = 3^{l_{2t+1}}$$

(alkalmas k_i, l_j egészekkel). Ekkor azonban

$$|a - c_1| = s_1 \cdot 3^{k_1}, \dots, |c_{2m-1} - b| = s_{2m} \cdot 3^{k_{2m}}, \\ |d_1 - a| = f_1 \cdot 3^{l_1}, \dots, |d_{2t} - b| = f_{2t+1} \cdot 3^{l_{2t+1}},$$

ahol s_i, f_j mindegyike 1 vagy (-1) . A fenti egyenlőségeket összeadva

$$(5) \quad 0 = \sum_{i=1}^{2m} s_i \cdot 3^{k_i} + \sum_{j=1}^{2t+1} f_j \cdot 3^{l_j}$$

adódik. Jelölje M a k_i, l_j egészek abszolút értékének maximumát. Az (5) összefüggés mindkét oldalát 3^M -nel megszorozva azt kapjuk, hogy

$$(6) \quad 0 = \sum_{i=1}^{2m} s_i \cdot 3^{k_i+M} + \sum_{j=1}^{2t+1} f_j \cdot 3^{l_j+M}.$$

Mivel itt $k_i + M, l_j + M \geq 0$, ezért a (6)-ban szereplő összegek minden tagja páratlan egész szám. A tagok száma, $2n + 2t + 1$ azonban szintén páratlan, így az összeg nem lehet páros (tehát 0 sem); ez ellentmondás, amivel (4)-et igazoltuk.

Ahhoz, hogy számainkat a kívánt módon két csoportra oszthassuk, előbb osztályokba soroljuk őket a következőképpen. Válasszunk ki közülük tetszőlegesen egy a_1 számot, és soroljuk az első osztályba a_1 -et és a_1 ismerőseit. Ha ezeken kívül marad még szám, akkor ezek közül válasszunk egy a_2 -t, és soroljuk a második osztályba a_2 -t és a_2 ismerőseit. Az eljárást folytatva végül valamennyi számot besorolhatjuk r osztály valamelyikébe, ahol az osztályok rendre $a_1, a_2, \dots, a_r$ -ből és ezek ismerőseiből állnak. Különböző osztályokba tartozó számok különbsége sohasem 3^k alakú; ha ugyanis a az i -edik, b pedig a j -edik osztályban van, és $|a - b| = 3^k$ ($i \neq j, k$ egész), akkor a és b ismerősök. Azonban a_i és a , valamint b és a_j is ismerősök, ezért (1) miatt a_i és a_j szintén ismerősök, ami lehetetlen.

Elegendő tehát az azonos osztályba tartozó számokat a kívánt módon két csoportra osztani. A p -edik osztály esetében alkossa az első csoportot a_p és az a_p -vel barátságos számok, míg a második csoportba az a_p -vel ellenséges számokat soroljuk. (2) szerint bármely két (különböző), az első csoportba tartozó szám barátságos, és (3) szerint ugyanez mondható a második csoport bármely két számáról is. (4) miatt tehát azonos csoportban levő számok nem lehetnek ellenségesek, így különbségük biztosan nem 3^k alakú.

Megjegyzések. 1. A feladat állítása 3^k helyett a^k -ra is igaz, tetszőleges páratlan a -val. A közölt bizonyítás némi módosításával belátható továbbá, hogy nemcsak véges sok, hanem akárhány (pl. az összes!) valós szám is két csoportra osztható a kívánt módon.

2. Tekintsük azt a gráfot, amelynek csúcsai a feladatban szereplő valós számok, és két csúcsot akkor köt össze él, ha a megfelelő számok különbsége 3^k alakú. A feladat szerint ekkor a kapott gráf páros. Ismeretes, hogy egy gráf akkor és csak akkor páros, ha minden körében páros sok él van. A fenti bizonyítás során is tulajdonképpen azt mutattuk meg, hogy ebben a gráfban nincs páratlan sok élből álló kör (l. (4)), majd ennek felhasználásával igazoltuk a gráf párosságát.