

Tíz egymást követő egész szám között mindig van 5-tel osztható, 7-tel osztható, 8-cal osztható és 9-cel osztható is. A keresett szám tehát szintén osztható ezekkel a számokkal. Mivel ez a négy szám egymáshoz páronként relatív prím, a keresett szám osztható ezek szorzatával, $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$ -szal is. Megfordítva: Ha egy egész szám osztható 2520-szal, akkor nyilván osztható 2520 valamennyi osztójával, s utóbbiak között létezik tíz egymást követő, nevezetesen 1, 2, 3, ..., 10. Feladatunk tehát annak a legkisebb, 2520-szal osztható n pozitív egész számnak a megtalálása, amelynek 144 pozitív osztója van.

Legyen n prímtenyezős felbontása $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$, ahol $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Ismeretes, hogy n (pozitív) osztóinak száma $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdot \dots \cdot (a_k + 1)$. Megmutatjuk, hogy $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k$. Tételezzük fel ugyanis, hogy például $a_1 < a_2$; az $n' = p_1^{a_2} \cdot p_2^{a_1} \cdot p_3^{a_3} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ számnak ekkor ugyanannyi osztója van, mint n -nek, és n' is osztható 2520-szal, hisz ennek a prímtenyezős felbontásában a két kitevő nagyságviszonya éppen fordítottja a megfelelő prímek nagyságviszonyának. Mivel azonban $n' < n$, ellentmondásra jutunk azzal a feltevessel, hogy n a legkisebb keresett tulajdonságú szám. Ugyancsak n minimalitásából következik, hogy n prímtenyezős felbontásában $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, és általában p_i az i -edik prím. Mivel n osztható 2520-szal, ezért $a_1 \geq 3$, $a_2 \geq 2$, $a_3 \geq 1$ és $a_4 \geq 1$. Az $(a_1 + 1) \cdot \dots \cdot (a_k + 1) = 144$ összefüggés alapján tehát 144-et fel kell írunk legalább négy (1-nél nagyobb) tényező szorzataként úgy, hogy az egyik tényező legalább 4, egy másik pedig legalább 3 legyen. Ezt nyolcféleképpen tehetjük meg (l. az alábbi táblázatban).

$(a_1 + 1) \dots (a_k + 1)$	n
$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3$	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 264\,600$
$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 138\,600$
$6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 151\,200$
$6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2$	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 272\,160$
$6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 110\,880$
$8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2$	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 201\,600$
$9 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2$	$2^8 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 241\,920$
$12 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$	$2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 645\,120$

E számok közül a keresett legkisebb 110 880.