

I. megoldás. Elegendő egy, a kívánt ábrához hasonló alakzatot szerkeszteni, ezt ugyanis alkalmas hasonlósági transzformáció a megfelelő helyzetbe viszi. Rajzoljunk egy C csúcsú φ szögtartományt és egy ennek szarait érintő k kört. Ha most a k kerületén megszerkesztjük azokat az A' és B' pontokat, amelyekre a $CA'B'$ és a CAB alakzatok hasonlóak (1. ábra), akkor az a C középpű forgatva nyújtás, amelyik A' -t az A -ba viszi, a B' -t a B -be, a k kört pedig az A és B pontokon áthaladó k körbe fogja vinni, és eközben φ -vel egyenlő marad az a szög, amelyben a k kör a C pontból látszik, tehát k egy megoldása a feladatnak.

1988-05-208-1.eps

1.a ábra

1988-05-208-2.eps

1.b ábra

Ha a $CA'B'$ és a CAB alakzatok hasonlóak, akkor az A' pontot egy C középpű, ACB szögű $\mathcal{F}$ forgatva nyújtás viszi a B' pontba. (Az 1/b ábrán, ahol az A, B és C egy egyenesre esnek, $\mathcal{F}$ középpontos hasonlóság.) Az $\mathcal{F}$ így az A' -n áthaladó k' kört egy a B' -n áthaladó k'' körbe viszi, ezért a B' pontot a két kör, k' és k'' metszéspontjaként kapjuk, ha ez létrejön. Az A' pontot ezután a CB' -vel CBA szöget bezáró, B' kezdőpontú félegyenes metszi ki a k' körből (1.a ábra).

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 aszerint, hogy hány közös pontja van a k' és a k'' köröknek.

A két segédkör, k' és k'' akkor és csak akkor metszi vagy érinti egymást, ha sugaraik összege legalább akkora, mint a középpontjaik távolsága. (A két kör nem tartalmazhatja egymást, mert C , a hasonlóság centruma mindkettejüknek külső pontja.) Jelölje a sugarakat r' és r'' , a középpontokat pedig O' és O'' . Ekkor

$$r' = O'C \cdot \sin \frac{\varphi}{2},$$

$$r'' = r' \cdot \frac{BC}{AC},$$

az $O'CO''$ és ACB alakzatok hasonlóságából pedig

$$O'O'' = O'C \cdot \frac{AB}{AC}.$$

Mint mondtuk, feladatunknak akkor és csak akkor létezik megoldása, ha

$$r' + r'' \geq O'O'', \quad \text{azaz}$$

$$O'C \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \left(1 + \frac{BC}{AC} \right) \geq O'C \cdot \frac{AB}{AC},$$

ahonnan rendezés után a

$$(1) \quad \sin \frac{\varphi}{2} \geq \frac{AB}{AC + BC}$$

feltételt kapjuk.

1988-05-209-1.eps

2.a ábra

1988-05-209-2.eps

2.b ábra

Ha (1)-ben egyenlőség áll, akkor k' és k'' érinti egymást, a feladatnak egy megoldása van, ha pedig a bal oldal nagyobb, akkor a körök metszik egymást, a megoldások száma kettő. A 2/b ábrán látható esetben, tehát ha a pontok egy egyenesen vannak és C nincs az AB intervallum belsejében – egyébként nyilván nincs megoldás – a két megoldás egybeeső.

II. megoldás. Legyen a szerkesztendő kör középpontja O , sugara r és használjuk a 3. ábra további jelöléseit is.

A COE derékszögű háromszögben

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{r}{CO}.$$

Mivel $EO = AO = r$, ezért a szerkesztendő kör O középpontjára az

$$\frac{AO}{OC} = \sin \frac{\varphi}{2}$$

feltételt kapjuk.

Ismeretes, hogy azoknak a pontoknak a mértani helye a síkban, amelyeknek két adott ponttól – az A és a C – mért távolságainak aránya adott, 1-től különböző pozitív szám – most $0 < \varphi < 180^\circ$, így $0 < \sin \frac{\varphi}{2} < 1$ – egy kör. (A bizonyítás megtalálható pl. *Hajós György*: Bevezetés a geometriába c. könyvének 124. oldalán). Az O pont tehát rajta van az A és a C pontokhoz tartozó $\sin \frac{\varphi}{2}$ arányú ún. *Apollóniusz*-féle körön. És mivel $BO = r$ és így

$$\frac{BO}{OC} = \sin \frac{\varphi}{2}$$

is igaz, az O ponton a B és C pontokhoz tartozó $\sin \frac{\varphi}{2}$ arányú Apollóniusz-kör is áthalad (hasonlóan az A és B pontok felező merőlegeséhez).

A három vonal – két kör és egy egyenes – közül kettőt megrajzolva megkapjuk a szerkesztendő kör középpontját, és egy pontja, A vagy B ismeretében magát a kört is (4. ábra). A feladatnak aszerint van 2, 1 vagy 0 megoldása, hogy a két kör metszi, érinti vagy pedig elkerüli egymást. Ebből némi számolással (1) adódik a megoldhatóság szükséges és elegendő feltételeként.