

Belátjuk az alakzatról – a feltételként kimondott három tény, valamint kiegészítő meglátásaink alapján –, hogy a 12 csúcs közül bármelyik kettő egyenértékű, tükrözésekkel, forgatásokkal egymásba vihető úgy, hogy egyidejűen minden más csúcs is csúcsba megy át.

1988-05-203-1.eps

1. ábra

Jelöljük a ritkán csíkozott téglalap csúcsait A, B, B', A' -vel, a sötét lapéit C, D, D', C' -vel, a világosait E, F, F', E' -vel, közös középpontjukat O -val (1. ábra).

A lapsíkpárok kimondott merőlegességein túl azt a meglátást is felhasználjuk, hogy a három lap él-irányai páronként párhuzamosak. Mindegyik párba egy XX' betűzésű és egy XY betűzésű irány tartozik, ahol X, Y a felhasznált betűk bármelyikét (alkalmas párjukat) jelentik, de $X \neq Y$. Továbbá, hogy az egybevágóságok így értendők: egyfelől a hat XX' betűzésű él egyenlő, másfelől a hat XY betűzésű. Jelöljük ezek közös hosszát sorra $2a$ -val, $2b$ -vel; végül $b > a$.

1988-05-203-2.eps

2. ábra

A párhuzamosságok alapján az alakzat nem a 2. ábra szerinti. Elfogadható, hogy bármelyik lap síkjára tükrözve a másik két lapot, azok önmagukba mennek át és persze maga a tükrörlap is.

1988-05-204-1.eps

3. ábra

Állítsunk egy a élhosszúságú kockát abba a tényolcadba, amelyikből az alakzatot szemléljük, illesszük egyik csúcsát O -ba, így három lapja rátámaszkodik egyik-egyik téglalapunkra. Legyenek a kockának az $ABB'A'$ lapra illeszkedő csúcsai O, G, H, J (G az EF élen s. í. t.), ezekkel szemben fekvő csúcsai rendre O_1, G_1, H_1, J_1 . Ismeretes, hogy a kocka az OO_1 testátló körüli 120° -os forgatásokkal önmagába megy át, J_1, H, G_1 előbb a H, G_1, J_1 , majd a G_1, J_1, H helyére fordul. Így a kockával együtt forgatott téglalapokból az A, C, E ponthármass előbb rendre a C, E, A helyzetbe, majd az E, A, C helyzetbe jut, hiszen ezek a pontok a kockaélek egyenesén vannak, az él $b : a$ arányú meghosszabbításának végpontjai, pl. $JA : JH = b : a$.

Ennyit elegendőnek vélünk ahhoz, hogy állításunkat megalapozottnak mond hassuk.

A szabályos ikozaédert (húsz lapú és konvex testet) azzal tekintjük meghatározottnak, hogy minden egyes csúcsában 5 szabályos háromszöglap fut össze, ebből az ún. Euler-féle poliédertétel alapján következik, hogy a lapok száma 20, a csúcsoké 12; a lapoknak az élekben való csatlakozásából pedig az, hogy minden él egyenlő hosszú.

1988-05-204-2.eps

4. ábra

A fentiek szerint elegendő a C csúcs „környezetében” azt biztosítanunk, hogy $CA = CC'$ legyen, hiszen a szimmetriák folytán CB, CE és CE' egyenlők CA -val. Ekkor ugyanis $EE' = CC'$ folytán a $CE'E$ háromszög szabályos lesz, hasonlóan az E csúcs környezetében $EA = EE'$ révén CEA szabályos s. í. t.

A CG_1JA törött vonal egymás utáni szakaszai páronként merőlegesek egymásra, követelményünk tehát így alakul:

$$CA^2 = CG_1^2 + G_1J^2 + JA^2 = (b-a)^2 + a^2 + b^2 = 2(b^2 + a^2 - ab) = CC'^2 = 4a^2.$$

Innen a szokásos rendezéssel ($a \neq 0$ alapján):

$$(1) \quad \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right) - 1 = 0,$$

és ennek csak a pozitív gyökét fogadjuk el a téglalapok oldalai arányaként: a

$$\frac{b}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

arány esetén adják a három téglalap csúcsai egy szabályos ikozaéder csúcsait. Ez éppen az „arany metszés” arányszáma.

Megjegyzések. 1. Az arany metszés arányszáma előfordul a szabályos ötszögben is, ennyi pl. az átló és az oldal aránya. Esetünkben az $AEE'BC'$ ötszög valóban síkidom, mert csúcsai rajta vannak az O körüli OA sugarú és a C körüli CA

sugarú gömbök metszés vonalán, ami kör, azaz síkidom. (A metszet forgásszimmetrikus, tehát síkja merőleges az OC tengelyre.)

2. Sokan felhasználtak egy téves képletet a Négyjegyű függvénytáblázat *egyes újabb kiadásai*ből, hogy az a élű ikozaéder köré írt gömb sugara $R = (1 + \sqrt{5})a/2$. A fentiekből kiszámítható, hogy helyesen $R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \cdot a/2$.

3. Az (1) egyenlet negatív gyöke *abszolút értékben* az előbbinek a reciprokra: kisebb 1-nél, tehát $b < a$. Bonyolultabb megfontolásokkal „kikínózható”, hogy így az ikozaédercsúcs *második* szomszédaitól vett távolságainak egyenlőségét biztosítjuk.