A legfeljebb n-jegyű pozitív egészek halmazát kiegészíthetjük a 0-val. Az így kapott C_n halmazt osszuk ketté: Jelölje rendre A_n, ill. B_n azoknak a C_n-beli számoknak a halmazát, amelyek számjegyeinek összege páros, ill. páratlan. A C_n-be tartozó számok mindegyike egyértelműen előállítható $10x + y$ alakban, ahol x a C_{n-1}, y pedig a C_1 halmaz egy-egy eleme. A továbbiakban mindvégig ezt az alakot használjuk majd.

I. Először azt mutatjuk meg, hogy A_n-nek és B_n-nek ugyanannyi eleme van, ha n tetszőleges pozitív egész.

Jelöljük egy H halmaz elemeinek a számát $E(H)$-val; nyilván $E(A_1) = E(B_1) = 5$. Ha $n > 1$, akkor C_n elemei $10x$, $10x + 2$, $10x + 4$, $10x + 6$, $10x + 8$, $10x + 1$, $10x + 3$, $10x + 5$, $10x + 7$, ill $10x + 9$, alakúak. Ezek közül az első öt típusba tartozók számjegyösszege x-ével azonos paritású, míg a második öt fajtáé az x paritásával ellentétes. Így minden rögzített x-re a fenti tíz szám közül öt A_n-ben, öt pedig B_n-ben van, ezért $E(A_n) = E(B_n)$.

II. Másodjára azt látjuk be, hogy ha $n > 1$, akkor A_n és B_n elemeinek összege egyenlő.

Számítsuk ki az $S_n = \sum\limits_{a\in A_n} a - \sum\limits_{b\in B_n} b$ különbséget! Ha $x \in A_{n-1}$, akkor a $10x + y$ alakú számok hozzájárulása S_n-hez:

$$10x + (10x + 2) + \ldots + (10x + 8) - (10x + 1) - \ldots - (10x + 9) = -5.$$

$x \in B_{n-1}$, esetén pedig

$$(10x + 1) + (10x + 3) + \ldots + (10x + 9) - 10x - (10x + 2) - \ldots - (10x + 8) = 5.$$

Így

$$S_n = \sum_{x\in A_{n-1}} (-5) + \sum_{x\in B_{n-1}} 5 = (-5)(E(A_{n-1}) - E(B_{n-1})) = 0.$$

III. Feladatunk állítására térve a $Q_n = \sum\limits_{a\in A_n} a^2 - \sum\limits_{b\in B_n} b^2$ különbségről belátjuk, hogy az értéke nulla.

Ha $x \in A_{n-1}$, akkor a $(10x + y)^2$ alakú tagok adaléka Q_n-hez:

$$\begin{gathered}(10x)^2 + (10x + 2)^2 + \ldots + (10x + 8)^2 - (10x + 1)^2 - (10x + 3)^2 - \ldots - (10x + 9)^2 = \\ = 2 \cdot 10x(2 + 4 + 6 + 8) + (2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2) - 2 \cdot 10x(1 + 3 + 5 + 7 + 9) - \\ -(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2) = cx + d.\end{gathered}$$

Ha $x \in B_{n-1}$, akkor a megfelelő számok négyzetének adaléka:

$$(10x + 1)^2 + (10x + 3)^2 + \ldots + (10x + 9)^2 - (10x)^2 - (10x + 2)^2 \ldots - (10x + 8)^2 = -cx - d.$$

Így

$$Q_n = \sum_{x\in A_{n-1}} (cx - d) + \sum_{x\in B_{n-1}} (-cx - d) = cS_{n-1} + d(E(A_{n-1}) - E(B_{n-1})) = 0.$$