

A szabályos háromszög oldalát az első kérdés vizsgálatakor is választhatjuk egységnyiinek. Legyenek tehát az egységnyi oldalú szabályos háromszög csúcsai A_1, A_2, A_3 , a velük szemben lévő oldalfelező pontok B_1, B_2 és B_3 . Ha adott a kerületen véges sok pont: $X_1, X_2, \dots, X_n$, akkor jelölje $F(Y)$ a háromszög egy tetszőleges Y kerületi pontjának az ezen pontoktól való átlagtávolságát, azaz legyen

$$F(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(Y, X_i),$$

ahol $d(Y, X_i)$ az Y és az X_i pontok távolsága.

$F(Y)$ folytonos függvények összegének n -ed része, így maga is folytonos. Bizonyítanunk kellene tehát, hogy van olyan t érték, amelyre Y helyzetének a háromszög kerületén történő változtatásával $F(Y)$ a t -nél nagyobb és a t -nél kisebb értéket is felvesz, ekkor ugyanis F folytonosságából következik, hogy van olyan Y pont is, melyre $F(Y) = t$.

1988-04-162-1.eps

1. ábra

Mindenekelőtt t értékét határozzuk meg, és egyben belátjuk, hogy ha létezik, akkor egyértelmű.

Ehhez két speciális esetet vizsgálunk, n értéke mindkét esetben 3 lesz: I. A választott pontok a háromszög csúcsai, tehát $X_1 = A_1, X_2 = A_2, X_3 = A_3$.

Ekkor $F(Y) = 1/3(d(Y, A_1) + d(Y, A_2) + d(Y, A_3))$. Ha Y az $A_1 A_2$ oldalon van (a háromszög szimmetriája alapján ezt az általánosság csorbitása nélkül föltehetjük), akkor $d(Y, A_1) + d(Y, A_2) = 1$ és Y távolsága a harmadik csúctól legalább akkora, mint a háromszög magassága (1. ábra), tehát $F(Y) \geq \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, és így t , ha létezik, nagyobb, vagy egyenlő, mint $\frac{1}{3} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1988-04-163-1.eps

2. ábra

II. A választott pontok ezután legyenek a háromszög oldalfelező pontjai: $X_1 = B_1, X_2 = B_2, X_3 = B_3$. Most $F(Y) = 1/3(d(Y, B_1) + d(Y, B_2) + d(Y, B_3))$. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy Y a $B_1 A_3$ szakaszon van (2. ábra). A $B_1 B_2 A_3$ szabályos háromszögben az oldal a legnagyobb távolság, így $d(Y, B_1)$ és $d(Y, B_2)$ akkor maximális, ha Y az A_3 csúcsba esik. Az $Y B_3 A_3$ háromszögben pedig a tompaszöggel szemközti oldal – az $A_1 A_2 A_3$ háromszög $A_3 B_3$ magassága – a legnagyobb. A három távolságra így a következő egyenlőtlenségeket írhatjuk fel:

$$d(Y, B_1) \leq 1/2, \quad d(Y, B_2) \leq 1/2 \quad \text{és} \quad d(Y, B_3) \leq \sqrt{3}/2,$$

tehát ekkor

$$F(Y) \leq 1/3 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

A két esetet összevetve állíthatjuk, hogy ha t létezik, akkor értéke csak $1/3(1 + \sqrt{3}/2)$ lehet. Belátjuk, hogy ez az érték rendelkezik az előírt tulajdonsággal.

Legyenek ehhez $X_1, X_2, \dots, X_n$ adott pontok a háromszög kerületén. Vizsgáljuk az $S = F(A_1) + F(A_2) + F(A_3)$ értéket. Ez nem más, mint a választott X_i pontoknak a háromszög csúcsaitól mért távolságátlagainak összege, azaz

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d(X_i, A_1) + d(X_i, A_2) + d(X_i, A_3)).$$

Mint láttuk, $d(X_i, A_1) + d(X_i, A_2) + d(X_i, A_3) \geq 3t$, tehát ezen mennyiségek átlaga, $S \geq 3t$, ami azt jelenti, hogy $F(A_1), F(A_2)$ és $F(A_3)$ közül egy legalább akkora, mint t .

Tekintsük ezután a $Q = F(B_1) + F(B_2) + F(B_3)$ összeget. Ez a választott X_i pontoknak a háromszög oldalfelező pontjaitól mért távolságátlagainak összege:

$$Q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d(X_i, B_1) + d(X_i, B_2) + d(X_i, B_3)).$$

Mint a fentiekben bizonyítottuk, $d(X_i, B_1) + d(X_i, B_2) + d(X_i, B_3) \leq 3t$, tehát $Q \leq 3t$, ami azt jelenti, hogy $F(B_1), F(B_2)$ és $F(B_3)$ közül valamelyik legfeljebb akkora, mint t .

Találtunk tehát egy csúcsot, melyre az $F(Y)$ függvény értéke t , vagy annál nagyobb, és egy oldalfelelező pontot, melyre a függvényérték t , vagy annál kisebb. Ha valamelyik esetben egyenlőség van, akkor máris megfelelő pontot találtunk, egyébként pedig, mint azt a megoldás kezdetén megállapítottuk, az $F(Y)$ függvény folytonosságából következik, hogy van legalább egy olyan Y pont a kerületen, melyre $F(Y) = t$.

Megjegyzések. 1. Mint azt többen észrevették, a feladat az F. 2641. feladat általánosítása. (Megoldás a lap 1987. évi 11. számának 380. oldalán.) 2. A vizsgált $F(Y)$ függvények most a sík pontjain vannak értelmezve: a sík pontjaihoz rendelnek egy-egy számot. Ami az ilyen függvények folytonosságát illeti, ez ugyanúgy értelmezhető, mint a számhoz számot rendelő függvényeké, tehát egy $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény akkor folytonos egy X_0 pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy a sík minden olyan X pontjára, amelyre $d(X, X_0) < \delta$, fennáll, hogy $|f(X) - f(X_0)| < \varepsilon$.

Ismeretes, hogy ha egy f függvény a valós számokon van értelmezve és folytonos egy I intervallumban, akkor az I -beli számok képpontjainak $f(I)$ -vel jelölt halmaza is intervallum, azaz f két tetszőleges I -beli értéke közé eső bármely értéket fölvesz az I intervallumban.

A feladatban ennek a tulajdonságnak egy – nem a legáltalánosabb – síkbeli változatát használjuk: a sík pontjaihoz számokat rendelő folytonos függvények egy C zárt görbén – jelen esetben a szabályos háromszög kerületén – fölvevett értékei ugyancsak intervallumot alkotnak.