

I. megoldás. Legyen az ABC háromszög területe t , és hívjunk egy e egyenest – a háromszög A csúcsára nézve – jónak, ha a BAC szögtartományból $t/2$ területű háromszöget vág le. Nyilvánvaló, hogy minden területfelező egyenes jó a háromszög valamelyik csúcsára nézve (a súlyvonalak két csúcsra nézve is), ez azonban megfordítva nem igaz, hiszen egy jó egyenes nem feltétlenül belső pontban metszi az A -ból induló oldalakat (1. ábra), és ilyenkor nem is felezi a háromszög területét.

1988-03-107-1.eps

1. ábra

Adott f területfelező egyenesre jelölje $d(f)$ az f -nek a háromszög belsejébe eső szakaszát, ha pedig az e egyenes jó, akkor legyen $d^*(e)$ az e megfelelő szögtartományba eső szakaszának a hossza. Ha f területfelező, akkor a fentiek szerint $d^*(f) = d(f)$.

Módosítsuk feladatunkat, a területfelezők helyett vizsgáljuk a jó egyenesek bővebb halmazát, és keressük a $d^*(e)$ mennyiségek minimumát. Mivel ez a számhalmaz bővebb, mint a feladatban szereplő $d(f)$ mennyiségek halmaza, a minimumot szolgáltató e_0 egyenesre $d^*(e_0) \leq d(f)$ minden f területfelező egyenes esetén. Ha ezután sikerül igazolnunk, hogy a talált jó e_0 egyenes egyúttal területfelező is, akkor készen vagyunk, e_0 lesz a keresett egyenes.

A $d^*(e)$ mennyiségek minimumának meghatározásához először azt bizonyítjuk be, hogy egy konvex szögtartományból adott területű háromszöget levágó egyenesek közül annak a legkisebb a szögcsúcsok közé eső szakasza, amelyik a szögtartományból egyenlő szárú háromszöget vág le. Legyen az A csúcsú konvex szögtartomány szöge α , az ABC háromszög az adott területű levágott háromszög (2. ábra), tegyük fel továbbá, hogy $AB < AC$.

1988-03-107-2.eps

2. ábra

Ekkor az egyenlő szárú $A'BC$ háromszög területe nagyobb, mint az ABC háromszög területe, hiszen BC oldaluk közös, a BC -hez tartozó magasság pedig az előbbi háromszögben nagyobb. Az $A'BC$ háromszögből így a BC -vel párhuzamos egyenessel levághatunk egy $A'B'C'$ háromszöget, amely egyenlő területű az ABC háromszöggel, és $B'C' < BC$. Ebből már következik a fenti állítás.

1988-03-107-3.eps

3. ábra

Ezután belátjuk, hogy két különböző szögű konvex szögtartományból adott területű egyenlő szárú háromszöget levágva, a nagyobb szög esetén lesz nagyobb a szögtartományt metsző egyenesnek a szárak közé eső szakasza. A 3. ábrán láthatjuk, hogy azonos hosszúságú szakaszok esetén a nagyobb szögtartományból levágott terület kisebb.

A fenti két észrevételből következik, hogy $d^*(e)$ a háromszög *legkisebb szögének* felezőjére merőleges jó e_0 egyenesre lesz minimális.

Meg kell még mutatnunk, hogy ez az e_0 egyenes egyúttal a háromszög területét is felezi. Ehhez belátjuk, hogy az AC és az AB oldalakat egy-egy belső pontban metszi.

Az α a legkisebb szög, így a vele szemközti a oldalra $a \leq b$ és $a \leq c$. Ha az e_0 egyenes által levágott egyenlő szárú háromszög szára h , akkor azt kell igazolnunk, hogy $h \leq b$ és $h \leq c$.

Mivel az e_0 jó, ezért

$$\frac{h^2 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{t}{2} = \frac{bc \cdot \sin \alpha}{4}, \text{ ahonnan } h = \sqrt{\frac{bc}{2}}.$$

A háromszög-egyenlőtlenség következtében $c < a + b \leq 2b$, tehát $b \cdot c < 2b^2$, vagyis

$$\sqrt{\frac{b \cdot c}{2}} < b, \text{ és ugyanígy kapjuk, hogy } \sqrt{\frac{b \cdot c}{2}} < c.$$

II. megoldás. Használjuk a 4. ábra jelöléseit. Tegyük fel, hogy B_1C_1 felezi a háromszög területét.

1988-03-108-1.eps

4. ábra

Ezért

$$\frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2} = x \cdot y \cdot \sin \alpha, \text{ amiből } x \cdot y = \frac{b \cdot c}{2}.$$

Számítsuk ki B_1C_1 hosszát a koszinusz tétellel:

$$B_1C_1^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos \alpha = (x - y)^2 + 2xy(1 - \cos \alpha),$$

amiből $x \cdot y$ fenti alakjával

$$B_1C_1^2 = (x - y)^2 + bc(1 - \cos \alpha).$$

Ebből látható, hogy B_1C_1 akkor a legkisebb, ha

$$x = y,$$

azaz a lemetezett háromszög egyenlő szárú, a szárak hossza pedig

$$x = y = \sqrt{\frac{b \cdot c}{2}}.$$

A levágott egyenlő szárú háromszög alapja ekkor

$$B_1C_1 = \sqrt{bc(1 - \cos \alpha)}.$$

Alakítsuk ezt át, fölhasználva a $bc \cdot \sin \alpha = 2t$ összefüggést :

$$B_1C_1 = \sqrt{2t \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}},$$

ahol t az ABC háromszög területe. Ezután az $1 - \cos \alpha = 2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ és a

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \text{ azonosságok alapján}$$

$$B_1C_1 = \sqrt{2t \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}},$$

ami azt jelenti, hogy B_1C_1 a háromszög szögeitől függően akkor a legkisebb, ha az α szög a legkisebb, hiszen a tangens függvény monoton növekvő a $(0, \pi/2)$ intervallumban.

Az első megoldásban látottakhoz hasonlóan most is meg kell mutatnunk, hogy ha α a legkisebb szög, akkor B_1 és C_1 az AC , illetve AB oldal belső pontja.

Megjegyzések: 1. A fenti megoldásokban talált szakasz nem a legrövidebb a háromszög területét felező „vonalak” közül.

1988-03-109-1.eps

5. ábra

Tegyük fel, hogy az 5. ábra B_1C_1 szakasza a legrövidebb területfelező szakasz, és legyen a szögfelezőjének a B_1C_1 -gyel való metszéspontja M_1 . Az AM_1C_1 háromszög nem egyenlő szárú, ezért az eddigiek alapján van olyan C_2M_2 szakasz, amely rövidebb C_1M_1 -nél, és ugyanakkora területű háromszöget metsz le az $\frac{\alpha}{2}$ szögű szögtartományból, mint C_1M_1 . A szögfelezőre vonatkozó tengelyes szimmetria miatt ekkor hasonló igaz a B_2M_2 szakaszra is. Ez azt jelenti, hogy a $C_2M_2B_2$ töröttvonal is felezi a háromszög területét, hossza pedig rövidebb B_1C_1 -nél. Az eljárást folytatva egyre rövidebb területfelező „vonalkhoz” jutunk. Bebizonyítható, hogy a legrövidebb felezővonal egy körív.

2. Az első megoldás bizonyos értelemben hiányos. Az abban vizsgált területeket, illetve egy adott szög szárait metsző jó egyenesekre a $d^*(e)$ mennyiséget magától értetődően folytonosnak tekintettük, és azt is természetesnek vettük, hogy a keresett minimum létezik. A II. megoldásban a B_1C_1 szakasz analitikus alakja mutatja, hogy ez a függvény valóban folytonos.

3. A legkisebb területfelező szakasz könnyen megszerkeszthető. Szerkeszthető ugyanis az $x = y = \sqrt{\frac{b \cdot c}{2}}$ mint b és $\frac{c}{2}$ mértani közepe.