

I. megoldás. Megmutatjuk, hogy a feladat kérdésére tagadó a válasz, a kockák nem cinkelhetők az előírt módon.

Legyen az i szám dobásának a valószínűsége a két kockán p_i illetve q_i . Ha S jelöli a dobott számok összegét, akkor nyilván

$$\begin{aligned} 1/11 &= P(S = 2) = p_1 \cdot q_1 > 0, \\ 1/11 &= P(S = 12) = p_6 \cdot q_6 > 0, \text{ illetve} \\ 1/11 &= P(S = 7) = p_1q_6 + p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2 + p_6q_1. \end{aligned}$$

Abból, hogy $p_1q_1 = p_6q_6 > 0$, következik, hogy p_1 és p_6 , illetve q_1 és q_6 nagyságviszonya nem lehet ugyanolyan, tehát $(p_1 - p_6)(q_1 - q_6) \leq 0$. A beszorzást elvégezve

$$(1) \quad p_1q_1 + p_6q_6 \leq p_1q_6 + p_6q_1$$

adódik.

A kapott egyenlőtlenség bal oldalán $P(S = 2) + P(S = 12)$ áll, ami az összeg mindkét tagjánál nagyobb, hiszen a tagok pozitívak. A jobb oldalon álló $p_1q_6 + p_6q_1$ viszont nem nagyobb, mint $P(S = 7)$. Ez azt jelenti, hogy ha $P(S = 2) = P(S = 12) > 0$, akkor $P(S = 7)$ mindkettejükénél nagyobb. Valóban nem lehetnek tehát egyenlők a 11 kérdéses összeg bekövetkezésének valószínűségei, sőt, ha ezek a valószínűségek pozitívak, akkor már $P(S = 2) = P(S = 12) = P(S = 7)$ sem lehetséges.

II. megoldás. Tegyük fel, hogy megadhatók olyan $p_1, p_2, \dots, p_6$, illetve $q_1, q_2, \dots, q_6$ nemnegatív számok, hogy $p_1 + p_2 + \dots + p_6 = q_1 + q_2 + \dots + q_6 = 1$, az egyes kockákon az i szám dobásának a valószínűsége p_i , illetve q_i , és minden lehetséges összeg bekövetkezésének ugyanannyi a valószínűsége, $\frac{1}{11}$. Ha S jelöli a dobott számok összegét, akkor ezek szerint

$$(2) \quad P(S = n) = \sum_{i=1}^6 p_i q_{n-i} = \frac{1}{11},$$

ha $n = 2, 3, \dots, 12$. (Ha $n - i$ értéke 0 vagy negatív, akkor a jobb oldali összegben q_{n-i} értéke legyen 0.)

Tekintsük ezután a

$$\begin{aligned} P(x) &= p_1 + p_2x + \dots + p_6x^5 \text{ és a} \\ Q(x) &= q_1 + q_2x + \dots + q_6x^5 \end{aligned}$$

polinomokat: a $\{p_1, p_2, \dots, p_6\}$ és $\{q_1, q_2, \dots, q_6\}$ valószínűségeloszlások úgynevezett *generátorfüggvényeit*. Vegyük észre, hogy a (2) jobb oldalán álló összeg nem más, mint az $(n-2)$ -edfokú tag együttthatója a két polinom szorzatában, és így feltevésünk szerint

$$(3) \quad P(x)Q(x) = \frac{1}{11}(1 + x + \dots + x^{10}).$$

Mármost $x^{11} - 1 = (x - 1)(1 + x + \dots + x^{10})$ alapján, ha egy valós szám gyöke az $1 + x + \dots + x^{10}$ polinomnak, akkor gyöke az $x^{11} - 1$ polinomnak is. Ez utóbbinak viszont egyetlen valós gyöke az $x = 1$, ami az $1 + x + \dots + x^{10}$ polinomnak nyilván nem gyöke. Ez azt jelenti, hogy a (3) jobb oldalán álló polinomnak nincs valós gyöke. Ez viszont nem lehetséges, hisz $P(x)$ és $Q(x)$ egyaránt valódi ötödfokú polinomok $\left(p_6q_6 = P(S = 12) = \frac{1}{11} \neq 0\right)$ és ismeretes, hogy egy páratlan fokú valós együttthatós polinomnak létezik valós gyöke. Föltevésünk tehát ellentmondásra vezetett, a szóban forgó valószínűségek nem lehetnek mind egyenlők.

Megjegyzés. A második megoldásban használt generátorfüggvény gondolata, tehát az $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ polinom hozzárendelése az $a_0, a_1, \dots, a_n$ sorozathoz *Leonhard Euler* (1707–1783) nevéhez fűződik. Általánosabb változata a matematika számos ágában bizonyult igen hasznos eszköznek; fenti, valószínűségszámítási alkalmazása azon múlik, hogy két valószínűségi változó összegének a generátorfüggvénye a tagok generátorfüggvényének a szorzata.