

I. megoldás. x és $x+1$ minden pozitív egész x -re relatív prím, így x^3 és $(x+1)^3$ relatív prím köbszámok. Belátjuk, hogy a különbségük, $3x^2 + 3x + 1$ végtelen sok x -re állít elő négyzetszámot, azaz a

$$3x^2 + 3x + 1 = y^2$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van a pozitív egészek körében.

Mindkét oldalt 4-gyel szorozva, majd a bal oldalt a $z = 2x + 1$ helyettesítéssel átalakítva a $3z^2 + 1 = 4y^2$ egyenletet kapjuk. Így azt kell belátnunk, hogy a

$$(1) \quad 4y^2 - 3z^2 = 1$$

egyenletnek végtelen sok olyan pozitív egész megoldása van, amelyekre z páratlan.

$y = z = 1$ megfelelő megoldás. Megmutatjuk, hogy ha y és z megfelelő, akkor $y' = 7y + 6z$ és $z' = 8y + 7z$ is az. Ha y és z pozitív egész, akkor y' és z' is az, továbbá $y' > y$ és $z' > z$, tehát egy adott megoldásból kiindulva végtelen sok különbözőt képezhetünk, amiből az állítás következik.

Látható, hogy ha z páratlan, akkor z' is az. Ezen kívül

$$4y'^2 - 3z'^2 = 4(49y^2 + 84yz + 36z^2) - 3(64y^2 + 112yz + 49z^2) = 4y^2 - 3z^2.$$

Tehát ha $4y^2 - 3z^2 = 1$, akkor $4y'^2 - 3z'^2 = 1$ is igaz. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Látható, hogy bármilyen pozitív növekvő p_n és q_n sorozatra, amelyre $4p_n^2 - 3q_n^2 = 1$, $\frac{p_n}{q_n}$ tart $\frac{\sqrt{3}}{3}$ -hoz, hiszen ha $4a^2 - 3b^2 = 0$, akkor $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, és p_n, q_n növekedésével $4p_n^2 - 3q_n^2$ értéke egyre inkább elhanyagolhatóvá válik. Ha $\frac{\sqrt{3}}{2}$ -t lánc törtekkel közelítjük:

$$\frac{1}{1}; \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}; \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2}}}; \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6}}}}$$

stb., (a továbbiakban a 6 és a 2 ismétlődik) és $\frac{p_i}{q_i}$ -vel az i -edik közelítő lánc tört közönséges tört alakját jelöljük, tapasztalhatjuk, hogy $4p_i^2 - 3q_i^2$ minden páratlan i -re 1 (és minden páros i -re -3). A megoldásban kimondott rekurzív alakokhoz így is el lehet jutni.

2. Az (1) egyenlet $u = 2y$ helyettesítéssel az $u^2 - 3z^2 = 1$ alakot ölti. Ez egy úgynevezett *Pell-féle* egyenlet. Feladatunk megoldása tehát egyenértékű annak igazolásával, hogy ennek a Pell egyenletnek végtelen sok olyan $(u; z)$ pozitív egészekből álló megoldása van, amelyben u páros, z pedig páratlan. A Pell-féle egyenletekről lapunk korábbi számaiban *Fried Ervin* írt egy 6 részből álló cikksorozatot. (Az első rész az 1976. évi 7. számban, a hatodik rész az 1978. évi 5. számban jelent meg.) Ebből a cikksorozatból az említett egyenlet általános megoldásán kívül – ami feladatunk megoldását is szolgáltatja – sok egyéb algebrai problémával is megismerkedhetnek érdeklődő olvasóink.

II. megoldás. Ha x és y relatív prímek, és egyikük páros, a másik páratlan, akkor könnyen látható, hogy $x + y$ és $x - y$ is relatív prímek. Be fogjuk látni, hogy végtelen sok ilyen x -re és y -ra lesz

$$(x + y)^3 - (x - y)^3 = 6x^2y + 2y^3 = 6y \left(x^2 + \frac{y^2}{3} \right)$$

négyzetszám.

Keressük y -t a 6-tal osztható számok között, azaz legyen $y = 6t$. Ekkor

$$(2) \quad 6y \left(x^2 + \frac{y^2}{3} \right) = 36t(x^2 + 12t^2).$$

Ez nyilván négyzetszám, ha t és $x^2 + 12t^2$ is az; x és y pedig relatív prímek, ha x és t is azok, és x nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal. Megmutatjuk, hogy végtelen sok x -re és t -re teljesül mindkét feltétel együtt.

Ha $x = m^2 - 12n^2$ és $t = mn$ (ahol m és n tetszőleges pozitív egészek), akkor

$$x^2 + 12t^2 = (m^2 - 12n^2)^2 + 12(2mn)^2 = (m^2 + 12n^2)^2,$$

vagyis ekkor (2) jobb oldalának harmadik tényezője valóban négyzetszám.

Könnyen ellenőrizhető, hogy ha $m = (6p + 1)^2$, ahol p tetszőleges pozitív egész, és $n = 2$, akkor az összes többi feltétel is teljesül. Ekkor $t = 4(6p + 1)^2$, ami négyzetszám, $x = (6p + 1)^4 - 48$, ami minden pozitív egész p -re pozitív

egész, és 6-tal osztva 1-et ad maradékul, tehát sem 2-vel, sem pedig 3-mal nem osztható. Végül x és t relatív prímek, hiszen a 2 kivételével a t minden prímosztója osztója $6p + 1$ -nek, tehát nem lehet osztója x -nek, mivel $6p + 1$ és 48 minden p -re relatív prímek.

Tehát az

$$x + y = (6p + 1)^4 + 24(6p + 1)^2 - 48$$

és az

$$x - y = (6p + 1)^4 - 24(6p + 1)^2 - 48$$

relatív prím számok köbének különbsége minden pozitív egész p -re négyzetszám, méghozzá különböző négyzetszám, hiszen p növelésével t és $x^2 + 12t^2$ is nő. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Megjegyzés. Feladatunk kapcsolatban áll a *Gy.* 2359. gyakorlattal, amelynek megoldása lapunk 1987. évi 3. számában jelent meg. A megoldás után közölt 2. megjegyzésben bizonyítás nélkül megadtunk a (2) egyenletben szereplő y -ra egy rekurzív formulát, amellyel végtelen sok y érték előállítható. Az erre a megjegyzésre való hivatkozást természetesen nem fogadtuk el megoldásnak, hiszen most éppen a megjegyzésben közölt állítás bizonyítása volt a kitűzött feladat.