

Egy négyzetszám maradéka 4-gyel osztva 0 vagy 1, így két négyzetszám összege nem adhat 4-gyel osztva maradékul 3-at. Négy, vagy annál több egymás utáni természetes szám között tehát van olyan, amelyik nem írható fel két négyzetszám összegeként, és így a k legnagyobb értéke legfeljebb 3 lehet.

Megmutatjuk, hogy ez a legnagyobb érték éppen a 3: megadunk végtelen sok olyan, szomszédos számokból álló számhármast, amelyek elemei fölírhatók két négyzetszám összegeként. Hívjuk a továbbiakban az ilyen tulajdonságú számokat *szépnek*.

Természetesnek tűnik az $\{m^2 - 1, m^2, m^2 + 1\}$ alakú hármasok vizsgálata, hiszen ezekben a második és a harmadik elem szép $(m^2 + 0^2, m^2 + 1^2)$, és így elég megmutatnunk, hogy $m^2 - 1$ végtelen sok m természetes számra szép.

Egy *Eulertől* származó azonosság szerint szép számok szorzata is szép. Valóban

$$(1) \quad (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

Ha most $m^2 - 1$ szép, akkor

$$(m^2)^2 - 1 = (m^2 - 1)(m^2 + 1),$$

és így az (1) azonosság szerint $(m^2)^2 - 1$ szép számok szorzataként maga is az.

Elegendő tehát egyetlen olyan a^2 négyzetszámot találnunk, amelyre $a^2 - 1$ szép, mert a fentiek szerint ekkor $a_0 = a$, $a_n = a_{n-1}^2$ választással az $a_n^2 - 1$ sorozat minden egyes eleme szép.

Mivel $8 = 3^2 - 1 = 2^2 + 2^2$, ezért $a = 3$ megfelelő. Az így kapott $3^{2^n} - 1$ ($n \geq 1$) sorozat minden eleme szép, és így a

$$\{3^{2^n} - 1, 3^{2^n}, 3^{2^n} + 1\}$$

számhármások elemei minden pozitív egész n -re előállnak két négyzetszám összegeként.

A k legnagyobb értéke tehát 3.

Megjegyzés: Könnyen látható, hogy a $4n^4 + 4n^2$ és a rákövetkező két természetes szám is megfelelő számhármast ad bármely pozitív egész n -re, hiszen

$$\begin{aligned} 4n^4 + 4n^2 &= (2n^2)^2 + (2n^2)^2, \\ 4n^4 + 4n^2 + 1 &= (2n^2 + 1)^2 + 0^2, \\ 4n^4 + 4n^2 + 2 &= (2n^2 + 1)^2 + 1^2. \end{aligned}$$

Peremiczki István (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o. t.)