

Ha $n = 1$, akkor minden x megoldás, hiszen $2x - 1 + 1 - x \equiv x$. Legyen tehát az $n \geq 2$. A továbbiakban két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy az n páros-e vagy páratlan.

1. eset. Az n páros. Ha $x > 1$, akkor $2x - 1 > x > 0$, így $(2x - 1)^n > x^n$ és $(1 - x)^n \geq 0$ (mert az n páros), tehát az egyenlet bal oldalán nagyobb szám áll, mint a jobb oldalán. Az $x = 1$ megoldása az egyenletnek.

Ha $\frac{1}{2} < x < 1$, akkor legyen $a = 2x - 1 > 0$ és $b = 1 - x > 0$. A vizsgált egyenlet ekkor $a^n + b^n = (a + b)^n$ alakú. A jobb oldalt a binomiális tétel alapján kifejtve könnyen belátható, hogy

$$(1) \quad (a + b)^n > a^n + b^n, \quad \text{ha} \quad n \geq 2, \quad a > 0 \quad \text{és} \quad b > 0.$$

Így tehát ebben az esetben sincs megoldás.

$x = \frac{1}{2}$ -re $2x - 1 = 0$, $1 - x = x$, tehát $x = \frac{1}{2}$ megoldás.

Végül ha $x < \frac{1}{2}$, akkor $|1 - x| > |x|$, hiszen $1 - x > x$ és $1 - x > -x$. Ekkor $(1 - x)^n = |1 - x|^n > |x|^n = x^n$ és $(2x - 1)^n > 0$ (mert n páros), tehát a bal oldal ismét nagyobb a jobb oldalnál.

Ha az n páros, akkor az egyenletnek két megoldása van: $x = \frac{1}{2}$ és $x = 1$.

2. eset. Az n páratlan. Látható, hogy ha az egyenletben szereplő három elsőfokú polinom ($2x - 1$, $1 - x$ és x) valamelyike nulla, akkor egyenlőséget kapunk, így $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ és $x = 0$ megoldások.

Ha egyikük sem nulla, akkor a páratlan n -re fennálló

$$z^n = (-z)^n$$

azonosság felhasználásával az egyenlet mindig $a^n + b^n = (a + b)^n$ alakba rendezhető, ahol a és b pozitív. A tagok előjelét és az egyenlet ennek megfelelő átrendezéseit az alábbi táblázat tartalmazza:

	$2x - 1$	$1 - x$	x	Bal oldal	Jobb oldal
$1 < x$	+	−	+	$(2x - 1)^n$	$(x - 1)^n + x^n$
$\frac{1}{2} < x < 1$	+	+	+	$(2x - 1)^n + (1 - x)^n$	x^n
$0 < x < \frac{1}{2}$	−	+	+	$(1 - x)^n$	$x^n + (1 - 2x)^n$
$x < 0$	−	+	−	$(-x)^n + (1 - x)^n$	$(1 - 2x)^n$

Az (1)-ben megfogalmazott állítás szerint az egyenletnek a kéttagú összeget tartalmazó oldala kisebb, mint a másik, így nincsen a fent talált három gyöktől különböző megoldás.

Egyenletünknek tehát $n = 1$ -re minden valós szám megoldása, ha pedig $n \geq 2$, akkor $x = \frac{1}{2}$ és $x = 1$, továbbá páratlan n -re még $x = 0$ is.

Csirik János (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. Páratlan n -re az $x = 0$ megoldás. Ha $x \neq 0$, akkor x^n -nel való osztás után $\frac{1 - x}{x} = t$ helyettesítéssel az

$$(2) \quad (1 - t)^n + t^n = 1$$

egyenlethez jutunk. Ha $f(t)$ -vel jelöljük a bal oldalon álló függvényt, akkor

$$f^n(t) = n(n - 1)[(1 - t)^{n-2} + t^{n-2}].$$

Könnyen belátható, hogy ha $n > 1$, akkor $f^n(t) > 0$. Ez nyilvánvaló, ha az n páros, ha pedig az n páratlan, akkor az átrendezés után kapott

$$t^{n-2} > (t - 1)^{n-2}$$

egyenlőtlenség a páratlan kitevőjű hatványfüggvény szigorú monotonitásából következik.

1988-02-063-1.eps

Az f függvény tehát szigorúan konvex, és így tetszőleges értéket – az 1-et is – legfeljebb kétszer vehet fel (ábra). Mivel $f(0) = f(1) = 1$, ezért ha $n > 1$, akkor a (2) egyenletnek pontosan két gyöke van, a $t = 0$ és a $t = 1$, ahonnan az eredeti egyenlet nullától különböző gyökei 1 és $\frac{1}{2}$.