

I. megoldás. Adott $x_1, x_2, \dots, x_n$ számokra legyen

$$(1) \quad S_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n) + (1-x_1)(1-x_2) \dots (1-x_n).$$

Nilván $S_1(x_1) = 2$, így ha $n = 1$, akkor mindkét bizonyítandó egyenlőtlenségben egyenlőség áll. A továbbiakban legyen az n legalább 2.

Ha (1) jobb oldalán elvégezzük a beszorzást, akkor a páratlan tényezőös szorzatok kiesnek és

$$(2) \quad S_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2 + 2P_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

adódik, ahol $P_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ az adott számokból készíthető páros tényezőös szorzatok összege. A feltétel szerint ezekben a szorzatokban minden egyes tényező pozitív és kisebb 1-nél, ezért

$$0 < P_n(x_1, x_2, \dots, x_n) < P_n(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ darab } 1\text{-es}}).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$(3) \quad 2 < S_n(x_1, x_2, \dots, x_n) < 2 + P_n(1, 1, \dots, 1).$$

A (3) jobb oldalán (2) szerint éppen

$$S_n(1, 1, \dots, 1) = (1+1)(1+1) \dots (1+1) + (1-1)(1-1) \dots (1-1) = 2^n$$

áll, és így

$$2 < S_n(x_1, x_2, \dots, x_n) < 2^n,$$

ha $n > 1$. Ezzel a bizonyítást befejeztük. Látható, hogy (3) szerint az $n > 1$ esetben egyik egyenlőtlenségben sem állhat egyenlőség.

II. megoldás. Jelöljük $\bar{x}$ -sal az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számok $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ átlagát. Mivel az x_i számok mindegyike 0 és 1 közé esik, így ugyanez $\bar{x}$ -ra is igaz.

A feltétel szerint az $(1+x_i)$ és az $(1-x_i)$ számok mindegyike pozitív, így a vizsgált összegben szereplő n -tényezőös szorzatok felülről becsülhetők a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség felhasználásával. Eszerint

$$(1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n) \leq \left(\frac{1+x_1+1+x_2+\dots+1+x_n}{n} \right)^n = (1+\bar{x})^n,$$

illetve

$$(1-x_1)(1-x_2) \dots (1-x_n) \leq \left(\frac{1-x_1+1-x_2+\dots+1-x_n}{n} \right)^n = (1-\bar{x})^n.$$

A két egyenlőtlenséget összeadva;

$$(1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n) + (1-x_1)(1-x_2) \dots (1-x_n) \leq (1+\bar{x})^n + (1-\bar{x})^n.$$

Itt $n = 1$ -re a bal oldal éppen 2, $n \geq 2$ -re viszont

$$(4) \quad (1+\bar{x})^n + (1-\bar{x})^n < (1+\bar{x}+1-\bar{x})^n = 2^n.$$

A binomiális tétel szerint ugyanis

$$\begin{aligned} & ((1+\bar{x}) + (1-\bar{x}))^n = (1+\bar{x})^n + \\ & + \binom{n}{1} (1+\bar{x})^{n-1} (1-\bar{x}) + \dots + \binom{n}{k} (1+\bar{x})^{n-k} (1-\bar{x})^k + \dots + (1-\bar{x})^n. \end{aligned}$$

Az összegnek legalább három tagja van, minden tag pozitív ($1+\bar{x} > 1$, $1-\bar{x} > 0$ a feltétel szerint), így az összeg határozottan nagyobb az első és utolsó tag összegénél. Ezzel a feladat egyenlőtlenségének jobb oldalát beláttuk, valamint azt is, hogy $n \geq 2$ -re nem állhat fenn egyenlőség. $n = 1$ -re viszont a vizsgált kifejezés értéke minden x_1 értékre $1+x_1+1-x_1=2$, tehát itt *minden* szóba jövő x_1 -re egyenlőség áll.

Az egyenlőtlenség bal oldalán $n = 1$ -re szintén mindig egyenlőség áll. Jelöljük most $j = 1, 2, \dots, n$ -re p_j -vel az $(1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_j)$, q_j -vel pedig az $(1-x_1)(1-x_2) \dots (1-x_j)$ szorzatot. Ekkor $p_j > q_j$, hiszen $0 < x_i < 1$ miatt $1+x_i > 1-x_i > 0$, s nagyobb pozitív számok szorzata is nagyobb. Másrészt

$$p_j + q_j = p_{j-1}(1+x_j) + q_{j-1}(1-x_j) = p_{j-1} + q_{j-1} + x_j(p_{j-1} - q_{j-1}) > p_{j-1} + q_{j-1},$$

hiszen $x_j > 0$ és $p_{j-1} - q_{j-1} > 0$. Azt kapjuk tehát, hogy

$$2 = p_1 + q_1 < p_2 + q_2 < \dots < p_{n-1} + q_{n-1} < p_n + q_n,$$

tehát az egyenlőtlenség bal oldala is igaz, és $n \geq 2$ -re nem lehet egyenlőség.

Összefoglalva: Az egyenlőtlenségekben sohasem állhat fenn egyenlőség, ha $n \geq 2$, és minden szóba jövő x_1 értékre egyenlőség van, ha $n = 1$.

Megjegyzések: 1. A feladat szövege kizárta az $x_i = 0$ vagy $x_i = 1$ lehetőséget. Természetesen nem tekintettük hibának, ha valaki a „nulla és egy közé esik” kifejezést úgy értelmezte, hogy e két eset is benne foglaltatik. Ez ugyanis csak konvenció kérdése, és aki a $0 \leq x_i \leq 1$ feltételből indult ki, az többletmunkát vállalt magára. (Megjegyezzük: ha egy feladat szövegezését nem érezzük egyértelműnek, mindig érdemes az általánosabb értelmezést választani, hiszen így a kitűző által elgondolt változatot is biztosan tárgyaljuk majd, ami az ellenkező esetben nem biztos.) Mindkét közölt bizonyítás könnyen kiterjeszthető a $0 \leq x_i \leq 1$ esetre is, ilyenkor azonban akkor is lehetséges egyenlőség, ha $n \geq 2$.

Az első megoldásban vizsgált páros tényezős szorzatok összege most lehet nulla, amennyiben minden egyes ilyen szorzat tartalmaz 0 tényezőt. Ez pedig pontosan akkor igaz, ha az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számok közül legfeljebb egy pozitív. Ilyenkor tehát

$$S_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2.$$

Ami a felső becslést illeti, itt nyilván pontosan akkor van egyenlőség, ha minden egyes páros tényezős szorzat értéke 1, azaz $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$.

2. A jobb oldali egyenlőtlenség is könnyen bizonyítható a $p_j + q_j = p_{j-1}(1 + x_j) + q_{j-1}(1 - x_j) = p_{j-1} + q_{j-1} + x_j(p_{j-1} - q_{j-1})$ azonosság alapján. Mivel $x_j \leq 1$ és $0 \leq p_{j-1} - q_{j-1} \leq p_{j-1} + q_{j-1}$, ezért $x_j(p_{j-1} - q_{j-1}) \leq p_{j-1} + q_{j-1}$ és $p_j + q_j = p_{j-1} + q_{j-1} + x_j(p_{j-1} - q_{j-1}) \leq 2(p_{j-1} + q_{j-1})$.

Innen azt kapjuk, hogy $p_n + q_n \leq 2(p_{n-1} + q_{n-1}) \leq 4(p_{n-2} + q_{n-2}) \leq \dots \leq 2^k(p_{n-k} + q_{n-k}) \leq \dots \leq 2^{n-1}(p_1 + q_1) = 2^n$. Egyenlőség csak akkor áll, ha minden $j \geq 2$ -re $x_j(p_{j-1} - q_{j-1}) = p_{j-1} + q_{j-1}$, azaz $x_j = 1$ és $q_{j-1} = 0$. Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha minden x_j értéke 1.

Ha viszont $n = 1$, akkor (a $j \geq 2$ feltétel miatt) nem kapunk kikötést, és minden x_i értékre egyenlőség van.